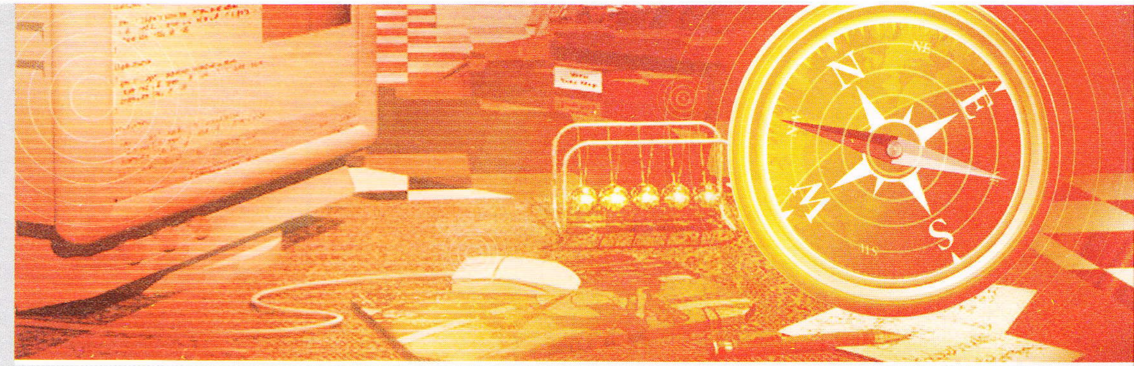
Учебник для вузов

ПИТЕР

И. Ф. Шишкин



Теоретическая метрология

Часть 1. Общая теория измерений

4-е издание

РЕКОМЕНДОВАНО МИНИСТЕРСТВОМ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

И. Ф. Шишкин

Теоретическая метрология

Часть 1. Общая теория измерений

4-е издание

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки «Метрология, стандартизация и сертификация» и специальностям «Метрология и метрологическое обеспечение», «Стандартизация и сертификация»

ПИТЕР®

Москва · Санкт-Петербург · Нижний Новгород · Воронеж
Ростов-на-Дону · Екатеринбург · Самара · Новосибирск
Киев · Харьков · Минск
2010

ББК 30.10я7
УДК 006.91(075)
Ш65

Шишкин И. Ф.

Ш65 Теоретическая метрология. Часть 1. Общая теория измерений: Учебник для вузов. 4-е изд., перераб. и доп. — СПб.: Питер, 2010. — 192 с.: ил. — (Серия «Учебник для вузов»).

ISBN 978-5-49807-203-6

В первой части учебника на аксиоматической основе излагается общая теория измерений безотносительно к их областям и видам. Оценка качества измерительной информации соответствует требованиям Руководства ИСО 1993 года по выражению неопределенности измерения.

Книга предназначена для студентов, обучающихся по специальностям 200501.65 «Метрология и метрологическое обеспечение», 200503.65 «Стандартизация и сертификация» и направлению подготовки магистров и бакалавров 200500.62 «Метрология, стандартизация и сертификация», и может использоваться студентами других технических специальностей и направлений подготовки, изучающих метрологию в составе общепрофессиональных дисциплин. Учебник также будет полезен сотрудникам государственной метрологической службы и работникам метрологических служб государственных органов управления Российской Федерации и юридических лиц, ученым и специалистам на производстве, занимающимся измерениями.

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки «Метрология, стандартизация и сертификация» и специальностям «Метрология и метрологическое обеспечение», «Стандартизация и сертификация».

ББК 30.10я7
УДК 006.91(075)

ISBN 978-5-49807-203-6

Содержание

Предисловие

Первый учебник для студентов высших учебных заведений по курсу «Теоретическая метрология» [1] появился в 1991 г. в связи с тем, что приказом Министерства высшего образования СССР от 17 ноября 1987 г. № 790 в номенклатуру специальностей высших учебных заведений страны была включена новая инженерная специальность 19.06 — «Метрология, стандартизация и управление качеством». Учебным планом специальности, рассчитанным на пятилетний срок обучения, предусматривалось изучение «Теоретической метрологии» в составе учебных дисциплин, формирующих научно-теоретические основы специальности. Программа курса была составлена автором учебника. Задача тогда состояла в том, чтобы очертить круг вопросов, относящихся к теоретической метрологии, обеспечить возможность дальнейшего непрерывного самообразования и углубленного изучения отдельных ее разделов в рамках специальных дисциплин.

В учебнике были сохранены и получили дальнейшее развитие дидактические принципы, заложенные автором в учебное пособие по одноименному курсу [2], отмеченное в 1985 г. на республиканской выставке учебной литературы в г. Смоленске.

За истекшее время произошли значительные изменения. Специальность 19.06 — «Метрология, стандартизация и управление качеством» разделилась на три инженерные специальности: 200501.65 — «Метрология и метрологическое обеспечение», 200503.65 — «Стандартизация и сертификация» и 220501.65 — «Управление качеством». В свою очередь, из «Теоретической метрологии» выделилась самостоятельная учебная дисциплина «Общая теория измерений» в составе федерального компонента, а оставшийся материал по рекомендации учебно-методической комиссии по специальности «Метрология и метрологическое обеспечение» (письмо от 26.12.2000 г. № 1– 26/930) изучается в отдельной дисциплине «Теоретическая метрология», входящей в состав национально-регионального (вузовского) компонента. Накоплен опыт преподавания предмета, позволивший усовершенствовать методику [3, 4], исключить ненужные и добавить необходимые сведения. Наконец, Руководством ИСО по выражению неопределенности измерения [5] в 1993 г. узаконен подход к оценке качества измерительной информации, развивавшийся в учебнике (1991 г.) и учебном пособии (1983 г.).

В предлагаемом издании «Теоретическая метрология» представлена двумя самостоятельными разделами: частью I — «Общая теория измерений» и частью II — «Обеспечение единства измерений».

Теория измерений безотносительно к их областям и видам впервые излагается на аксиоматической основе, что свидетельствует о том, что этот раздел метрологии приобретает, можно сказать, вполне законченную форму.

Обеспечение единства измерений рассматривается с современной точки зрения, предполагающей возможность децентрализованного воспроизведения единиц на основе достижений квантовой метрологии.

Замечания, предложения и пожелания, направленные на улучшение качества учебника, можно направлять в Северо-Западный государственный заочный технический университет на базовую кафедру метрологии при ФГУП «ВНИИМ им. Д. И. Менделеева» по адресу: 191186, Санкт-Петербург, ул. Миллионная, д. 5.

Обозначения

Обозначения, за редкими исключениями, соответствуют правилу: неслучайные числа, значения и функции набраны прямым шрифтом; случайные — курсивом.

$\mathbf{Q}$	— размер;
$[\mathbf{Q}]$	— размер, принятый за единицу измерения;
Q, A, B, Ξ	— значения;
Q, A, B, $\mathit{\Xi}$	— случайные значения; результаты измерений;
$\overline{Q}$	— среднее значение;
$\hat{\overline{Q}}$	— оценка среднего значения; среднее арифметическое взвешенное;
$\hat{\overline{Q}}_n$	— среднее арифметическое значение;
q	— числовое значение;
x	— отсчет; число бракованных изделий в выборке;
$\mathbf{M}(x)$	— математическое ожидание случайного числа x;
$\mathbf{D}(x)$	— дисперсия случайного числа x;
X	— показание;
θ	— поправка;
$\overline{\theta}$	— аналог среднего значения поправки;
P	— вероятность; доля бракованных изделий в партии;
p	— плотность вероятности;
F	— функция распределения вероятности;
L	— функция Лапласа — интеграл вероятности;
f	— аналитическая функция;
g	— весовой коэффициент;
t	— коэффициент, определяемый доверительной вероятностью; коэффициент Стьюдента;
k	— аналог коэффициента Стьюдента; коэффициент охвата; число интервалов на гистограмме;
χ^2	— аргумент функции распределения вероятности Пирсона;
d	— часть составного критерия;

m — количество экспериментальных данных в интервале ΔQ;
m — число средств измерений;
n — количество экспериментальных данных; объем выборки;
σ^2 — дисперсия;
σ — среднее квадратическое отклонение;
u^2 — аналог дисперсии;
u — аналог среднего квадратического отклонения; стандартная неопределенность типа В;
S^2 — оценка дисперсии;
S — стандартное отклонение; стандартная неопределенность типа А;
ρ — коэффициент корреляции;
α — условная вероятность ошибки I рода;
β — условная вероятность ошибки II рода;
u — мгновенное значение напряжения;
U — пороговое значение напряжения; расширенная неопределенность;
R — риск;
Λ — отношение правдоподобия;
Ac — приемочное число;
G — область интегрирования;
H — энтропия;
I — количество измерительной информации.

Глава 1
Исходные положения

1.1. Свойства окружающего мира и их меры

Окружающая нас реальность представлена объектами, свойствами и явлениями материального и духовного мира. Объектом материального мира, например, является пространство, а его свойством — протяженность. Последняя может характеризоваться различными способами. Общепринятой характеристикой (мерой) пространственной протяженности служит *длина*. Однако протяженность реального физического пространства является сложным свойством, которое не может характеризоваться только длиной. Для полного описания пространства рассматривается его протяженность по нескольким направлениям (координатам) или дополнительно используются такие меры, как *угол*, *площадь*, *объем*. Таким образом, пространство является многомерным.

Любые события и явления в реальном мире происходят не мгновенно, а имеют некоторую длительность. Это свойство окружающего нас мира качественно отличается от пространственной протяженности. Его также можно характеризовать по-разному, но общепринятой мерой здесь является *время*.

Свойство тел сохранять при отсутствии внешних воздействий состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется инертностью. Мерой инертности служит *масса*.

Свойство тел, состоящее в том, что они нагреты до некоторого состояния, качественно отличается от предыдущего. Оно могло бы характеризоваться средней скоростью теплового движения молекул, но распространение получила другая мера нагретости тел, называемая *термодинамической температурой*.

Общепринятые или установленные законодательным путем характеристики (меры) различных свойств, общие в качественном отношении для многих физических объектов (физических систем, их состояний и происходящих в них процессов), но в количественном отношении индивидуальные для них, называются физическими величинами. Кроме вышеперечисленных длины, времени, массы и температуры к ним относятся *плоский* и *телесный угол*, *скорость*, *ускорение*, *сила* и *давление*, *мощность* и *энергия*, *яркость*, *освещенность, сила электрического тока, напряженность электрического поля* и многие другие.

Объектами рыночных отношений являются продукция, товары и услуги, важнейшим свойством которых служит их качество. Качество многомерно. **Общепринятые или установленные законодательным путем характеристики (меры) качества, общие в качественном отношении для различных видов продукции, товаров и услуг, но в количественном отношении индивидуальные для них, называются** показателями качества. Так, например, к показателям качества продукции относятся:

- *показатели назначения*, характеризующие свойства продукции, определяющие ее функциональное предназначение и обусловливающие область применения;
- *показатели безопасности*, характеризующие степень безопасности потребителей и обслуживающего персонала при использовании продукции;
- *показатели надежности*, характеризующие долговечность, безотказность, ремонтопригодность и сохраняемость продукции;
- *показатели экономичности*, отражающие совершенство изделия по уровню или степени энергосбережения, экономии сырья, материалов и трудовых ресурсов при эксплуатации;
- *показатели технологичности*, определяющие возможность минимизации затрат при производстве продукции, ее эксплуатации и восстановлении;
- *показатели транспортабельности*, характеризующие удобство транспортировки продукции к месту эксплуатации или потребления;
- *показатели стандартизации и унификации*, характеризующие насыщенность продукции стандартными, унифицированными и оригинальными составными частями, а также уровень унификации с другими изделиями;
- *патентно-правовые показатели*, характеризующие степень обновления технических решений, использованных в продукции, их патентную защиту, а также возможность беспрепятственной реализации продукции в стране и за рубежом;
- *экологические показатели*, характеризующие уровень антропогенного воздействия продукции на окружающую среду;
- *эргономические показатели*, отражающие приспособленность продукции к антропометрическим, физиологическим, психологическим и гигиеническим особенностям и потребностям человека;
- *эстетические показатели*, отражающие эмоциональное воздействие продукции на человека;
- *обобщенный (интегральный) показатель качества*, определяемый как соотношение суммарного полезного эффекта от эксплуатации или потребления продукции и суммарных затрат на ее производство и эксплуатацию или потребление.

Качество является важнейшим свойством не только продукции, товаров или услуг. Можно говорить о качестве жизни, качестве здоровья, качестве художественного произведения, качестве подготовки к экзаменам и т. п. Показателями качества выступления спортсменов на соревнованиях по фигурному катанию на коньках, например, служат:

- *техника выполнения элементов* различной категории сложности;
- *художественное впечатление* от выполнения программы в целом.

В метрологии показателями качества измерений на протяжении долгого времени были:

- *точность*;
- *правильность*;
- *сходимость*;
- *воспроизводимость*.

В 1981 г. Международный комитет мер и весов (МКМВ) рекомендовал использовать повсеместно такой показатель качества, как *неопределенность* измерения (в различных его модификациях). В 1993 г. Международная организация по стандартизации (ИСО) выпустила Руководство по выражению неопределенности измерений, фактически придавшее этой рекомендации силу международного стандарта.

Неопределенность измерения может быть следствием двух причин:

1) рассеяния результата измерения при многократном повторении измерительной процедуры, **что является объективным законом природы**;

2) отсутствия необходимой информации, то есть недостаточности каких-то сведений, знаний, **что характерно не только для измерений**.

Соответственно существуют два способа количественной оценки неопределенности:

А — использование апостериорной (от лат. *a posteriori* — после опыта, в данном случае — после измерения) информации, полученной при многократном повторении измерительной процедуры;

В — математическое моделирование ситуации, состоящей в том, что отсутствует какая-то необходимая информация.

Таким образом, неопределенность является **свойством, общим в качественном отношении для результатов измерений и различных ситуаций, но в количественном отношении индивидуальным в каждом конкретном случае**. Поэтому она должна иметь общепринятую или установленную законодательным путем меру. Рассмотрим под этим углом зрения оба способа количественной оценки неопределенности.

Способ А

Наличие апостериорной информации в виде значений результата измерения, получающихся после каждого повторения измерительной процедуры, позволяет построить гистограмму (рис. 1)[1] и установить закон распределения вероятности

[1] Подробно построение гистограммы рассмотрено на с. 58–58, 149, 152.

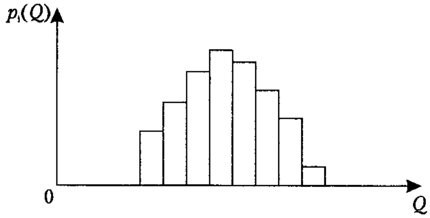


Рис. 1. Представление массива экспериментальных данных в виде гистограммы

результата измерения. В качестве меры его неопределенности можно было бы использовать энтропию

$$H = -\int_{-\infty}^{\infty} p(Q)\log[p(Q)]dQ, \tag{1}$$

где $p(Q)$ — плотность вероятности результата измерения Q. Но выбрали не энтропию, а *среднее квадратическое отклонение*, вместо которого на практике может быть получена лишь его оценка — *стандартное отклонение*

$$S_Q = \sqrt{\widehat{\overline{Q^2}} - \widehat{\overline{Q}}^2}. \tag{2}$$

Стандартное отклонение является мерой неопределенности, обусловленной рассеянием результата измерения, а способ А заключается в использовании математической статистики для количественной оценки этой неопределенности.

Способ В

Предположим, что интересующее нас значение Q находится в интервале от Q_1 до Q_2, но чему именно оно равно в этом интервале, неизвестно. Если при этом никакой дополнительной информации нет и нет оснований считать те или иные значения Q в интервале от Q_1 до Q_2 более вероятными, чем другие, то естественно предположить, что все значения Q в интервале от Q_1 до Q_2 равновероятны, то есть представить эту **ситуацию** математической моделью в виде равномерного закона распределения вероятности Q в интервале от Q_1 до Q_2 (рис. 2). Следует со всей определенностью подчеркнуть, что на самом деле Q не является случайной величиной, не подчиняется никакому закону распределения вероятности, и математическая модель, представленная на рис. 2, является математической моделью именно **ситуации**, состоящей в том, что точное значение Q неизвестно. Мерой неопределенности этой ситуации служит *среднее квадратическое отклонение* Q, как если бы эта величина была случайной. Чтобы не путать его с настоящим *средним квадратическим отклонением*, определяемым методами математической статистики, его обозначают буквой «u». Так, для математической (ситуационной) модели, показанной на рис. 2,

$$u_Q = \frac{Q_2 - Q_1}{2\sqrt{3}}$$

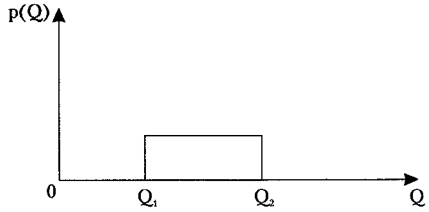


Рис. 2. Ситуационная модель в виде равномерного закона распределения вероятности

Аналог среднего квадратического отклонения неслучайной величины, дефицит информации о значении которой моделируется «законом распределения ее вероятности», является мерой неопределенности этого значения, а способ В заключается в использовании ситуационной модели для количественной оценки этой неопределенности.

Таким образом, мерой неопределенности служит *среднее квадратическое отклонение*, вместо которого на практике вычисляются либо его оценка — способом А, либо его аналог — способом В. В Руководстве ИСО используются термины: *«стандартная неопределенность типа А»* и *«стандартная неопределенность типа В»*, или *«оценивание стандартной неопределенности по типу А»* и *«оценивание стандартной неопределенности по типу В»*.

Пример 1

При неоднократном измерении напряжения разными вольтметрами получены следующие значения показаний:

Первый прибор		Второй прибор	
U, В	U^2, В^2	U, В	U^2, В^2
196	38416	192	36864
198	39204	194	37636
198	39204	195	38025
199	39601	198	39204
200	40000	200	40000
200	40000	201	40401
201	40401	203	41209
201	40401	204	41616
202	40804	206	42436
205	42025	207	42849
$\hat{\bar{U}} = 200$ В	$\hat{\overline{U^2}} = 40005{,}6$ В^2	$\hat{\bar{U}} = 200$ В	$\hat{\overline{U^2}} = 40024$ В^2
$S_U = \sqrt{\hat{\overline{U^2}} - \hat{\bar{U}}^2} = 2{,}37$ В		$S_U = \sqrt{\hat{\overline{U^2}} - \hat{\bar{U}}^2} = 4{,}90$ В	

Качество измерений первым прибором выше, так как результат измерения вторым прибором имеет большую стандартную неопределенность типа А.

Пример 2

Пик производства на одном из отечественных предприятий пришелся на 11-ю пятилетку, а зарубежная фирма пережила свой расцвет в первой половине XX в. Сравнить неопределенность сведений о том, к какому году относится каждое из этих событий.

В первом случае неопределенность составляет

$$u = \frac{1985-1981}{2\sqrt{3}} = 1{,}2\ \text{года},$$

во втором —

$$u = \frac{1950-1900}{2\sqrt{3}} = 14{,}5\ \text{года}.$$

Сведения об отечественном предприятии имеют гораздо меньшую неопределенность, чем сведения о зарубежной фирме.

Кроме упомянутых выше физических величин, показателей качества существуют и другие меры, что является отражением многообразия материального и духовного мира. Мы живем в многомерном мире.

1.2. Измерение и наука об измерениях

Одномерные и многомерные свойства объектов и явлений окружающего мира являются предметами познания (рис. 3). Теория познания — ГНОСЕОЛОГИЯ (от древнегреч. γνωσις — знание, познание и λογος — речь, слово, учение или наука) — относится к философии — матери всех наук. В ней различаются категории *качества* и *количества*. Точными количественными исследованиями занимаются естественные науки. Методами исследований служат *теория* и *эксперимент*. В свою очередь эксперименты могут выполняться с применением и без применения технических средств.

Полученная тем или иным способом количественная информация о свойствах объектов и явлений окружающего мира преобразуется, передается и представляется в наглядной форме в информационно-измерительных системах или других устройствах отображения и регистрации информации. Использование этой информации является конечной целью познавательной деятельности.

Получение информации о количественных характеристиках свойств объектов и явлений окружающего мира опытным путем (то есть экспериментально) называется ИЗМЕРЕНИЕМ. В отличие от количественной информации, получаемой теоретическим путем, то есть посредством вычислений и расчетов, такая информация называется **измерительной**. На рис. 3 выделены элементы, относящиеся к получению измерительной информации.

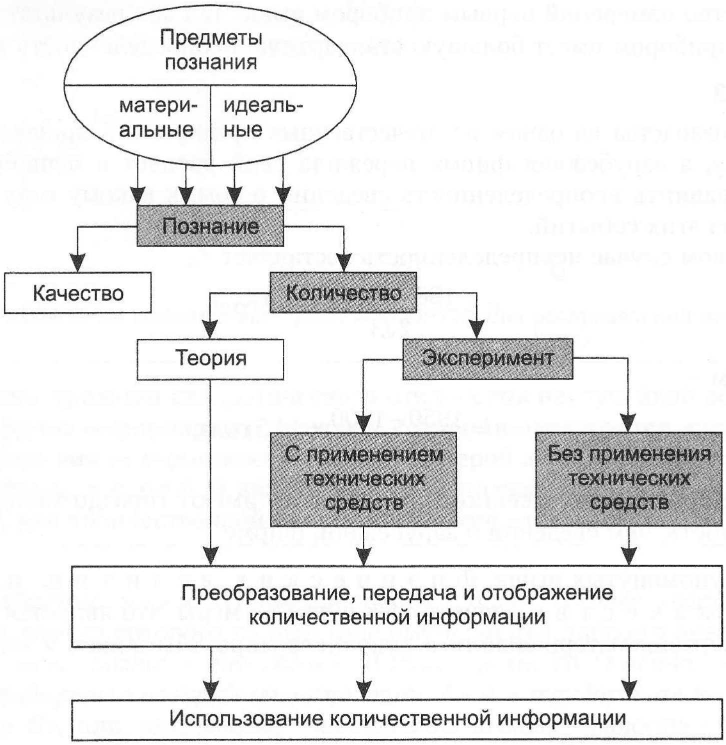


Рис. 3. Стилизованная схема получения и использования количественной информации

Во время измерений проявляются некоторые объективные законы природы. Кроме того, при получении измерительной информации должны соблюдаться определенные правила и нормы, установленные законодательным путем. Все это составляет предмет **науки об измерениях — МЕТРОЛОГИИ** (от древнегреч. μετρον — мера и λογος). Базисное положение этой науки определил основоположник отечественной метрологии Д. И. Менделеев в словах: «... наука начинается... с тех пор, как начинают измерять; точная наука немыслима без меры». Ему же принадлежит и другое важное замечание: «В природе мера и вес суть главные орудия познания».

1.3. Качественная характеристика измеряемых величин

Формализованным отражением качественного различия между измеряемыми физическими величинами служит их *размерность*. Размерность обозначается символом dim, происходящим от слова dimension, которое в зависимости от контекста может переводиться и как размер, и как размерность.

Размерность **основных физических величин** обозначается соответствующими заглавными буквами. Для *длины*, *массы* и *времени*, например,

$$\dim \ell = L;\ \dim \mathbf{m} = M;\ \dim \mathbf{t} = T.$$

При определении размерности **производных физических величин** руководствуются следующими правилами:

1. Размерности левой и правой частей уравнения не могут не совпадать, так как приравниваться друг к другу могут только одинаковые свойства. Объединяя левые и правые части уравнения, можно прийти к выводу, что алгебраически могут суммироваться только величины, имеющие одинаковые размерности.
2. Алгебра размерностей мультипликативна, то есть состоит всего лишь из двух действий — умножения и деления.
   2.1. Размерность произведения нескольких величин равна произведению их размерностей. Так, если зависимость между величинами имеет вид $\mathbf{Q} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$, то

   $$\dim \mathbf{Q} = \dim \mathbf{A} \cdot \dim \mathbf{B} \cdot \dim \mathbf{C}.$$

   2.2. Размерность частного при делении одной величины на другую равна отношению их размерностей, то есть, если $\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$, то

   $$\dim \mathbf{Q} = \frac{\dim \mathbf{A}}{\dim \mathbf{B}}.$$

   2.3. Размерность любой величины, возведенной в степень, равна ее размерности в той же степени. Так, если $\mathbf{Q} = \mathbf{A}^n$, то

   $$\dim \mathbf{Q} = \prod_1^n \dim \mathbf{A} = \dim^n \mathbf{A}.$$

Например, если *скорость* определяется по формуле $\mathbf{v} = \ell/\mathbf{t}$, то $\dim \mathbf{v} = \dim \ell/\dim \mathbf{t} = L/T = LT^{-1}$. Если *сила* по второму закону Ньютона $\mathbf{F} = \mathbf{ma}$, где $\mathbf{a} = \mathbf{v}/\mathbf{t}$ — ускорение тела, то $\dim \mathbf{F} = \dim \mathbf{m} \cdot \dim \mathbf{a} = ML/T^2 = MLT^{-2}$.

Таким образом, всегда можно выразить размерность производной физической величины через размерности основных физических величин с помощью степенного одночлена:

$$\dim \mathbf{Q} = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} \ldots,$$

где L, M, T, ... — размерности соответствующих основных физических величин; α, β, γ, ... — *показатели размерности*. Каждый из показателей размерности может быть положительным или отрицательным, целым или дробным числом, нулем. Если все показатели размерности равны нулю, то такая величина называется *безразмерной*. Она может быть *относительной*, определяемой как отношение одноименных величин (например, относительная диэлектрическая проницаемость), или ***логарифмической***, определяемой как логарифм относительной величины (например, логарифм отношения мощностей или напряжений).

Итак, **размерность является качественной характеристикой измеряемой величины**. Она отражает ее связь с основными физическими величинами и зависит от выбора последних. Как указывал М. Планк, вопрос об *истинной* размерности любой величины «имеет не более смысла, чем вопрос об *истинном* названии какого-либо предмета». По этой причине во многих гуманитарных науках, где номенклатура основных и производных измеряемых величин, равно как и связь между ними, еще не определились, теория размерностей не находит пока эффективного применения. В физике, напротив, методами теории размерностей нередко удается получать важные самостоятельные результаты. Формальное применение алгебры размерностей, например, позволяет иногда определить неизвестную зависимость между физическими величинами.

Пример 3

В результате наблюдений установлено, что при движении тела по окружности сила **F**, прижимающая его к опоре (рис. 4), в какой-то степени зависит от скорости тела **v**, его массы **m** и радиуса окружности **r**:

$$\mathbf{F} = \mathbf{m}^{\alpha}\mathbf{v}^{\beta}\mathbf{r}^{\gamma}.$$

Каков вид этой зависимости?

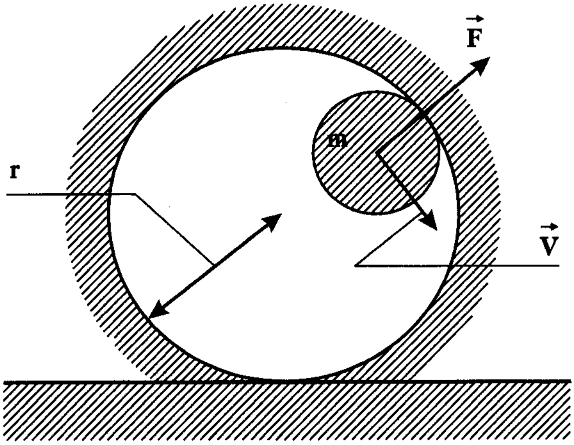


Рис. 4. Движение тела по окружности

Решение. На основании алгебры размерностей

$$\dim \mathbf{F} = \dim^{\alpha}\mathbf{m} \cdot \dim^{\beta}\mathbf{v} \cdot \dim^{\gamma}\mathbf{r},$$

но $\dim \mathbf{F} = LMT^{-2}$; $\dim \mathbf{m} = M$; $\dim \mathbf{v} = LT^{-1}$; $\dim \mathbf{r} = L$. Отсюда

$$LMT^{-2} = M^{\alpha}(LT^{-1})^{\beta}L^{\gamma} = L^{\beta+\gamma}M^{\alpha}T^{-\beta}.$$

Следовательно, показатели размерности удовлетворяют уравнениям:

$$\beta + \gamma = 1;$$
$$\alpha = 1;$$
$$-\beta = -2,$$

решения которых: $\alpha = 1$; $\beta = 2$; $\gamma = -1$. Таким образом,

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{mv}^2}{\mathbf{r}}.$$

К выводу этой зависимости на основе законов механики был близок Галилей, но первым ее установил Гюйгенс.

Теория размерностей повсеместно применяется для оперативной проверки правильности формул. Если размерности левой и правой частей уравнения не совпадают, то есть не соблюдается первое правило, то в выводе формулы, к какой бы области знаний она ни относилась, следует искать ошибку.

Теория размерностей, как это видно из рис. 3, не относится к метрологии, но используется метрологами при построении поверочных схем для обеспечения единства измерений.

1.4. Количественная характеристика измеряемых величин

Любое свойство может проявляться в большей или меньшей степени, то есть имеет количественную характеристику. Следовательно, любое свойство может быть измерено. «Измеряй все доступное измерению и делай доступным то, что еще недоступно» (Галилео Галилей).

Особенно следует подчеркнуть возможность измерений в нематериальной сфере. «Всякое качество имеет бесконечно много количественных градаций» (Фридрих Энгельс, «Диалектика природы») и, следовательно, может быть измерено. Раздел метрологии, посвященный измерению качества, называется КВАЛИМЕТРИЕЙ.

Количественной характеристикой любого свойства служит *размер*, хотя не принято говорить «размер длины», «размер массы» или «размер показателя качества». Говорят просто «длина», «масса» или «показатель транспортабельности».

Размер является объективной количественной характеристикой, не зависящей от выбора единиц измерения. Например, 1000 мм; 100 см; 1 м; 0,001 км — четыре варианта представления одного и того же размера. Каждый из них является *значением* физической величины (в данном случае — длины) — выражением размера в тех или иных единицах измерения.

Значение можно представить в виде произведения:

$$Q = q[\mathbf{Q}], \tag{4}$$

где q — отвлеченное число, называемое *числовым значением*, а [Q] — *размер единицы* измерения. Из приведенных примеров видно, что значение, как и размер, от выбора единиц не зависит, в отличие от числового значения. Для одного и того же размера числовое значение тем меньше, чем больше единица измерения (и наоборот), так что произведение в правой части уравнения (4) остается постоянным.

Из-за зависимости числовых значений от размеров единиц роль последних очень велика. Если допустить произвол в выборе единиц, то результаты измерений окажутся несопоставимы между собой, то есть нарушится *единство измерений*. Чтобы этого не произошло, единицы измерений устанавливаются по определенным правилам и закрепляются законодательным путем. **Наличие законодательной метрологии отличает эту науку от других естественных наук (физики, химии и т. д.) и направлено на обеспечение единства измерений.**

Представление о трудностях, которые возникают при использовании разных единиц измерения, можно получить из следующих примеров:

Пример 4

Дюймовые доски длиной 3 м и шириной 20 см отпускаются со склада по цене 500 руб. за кубометр. Сколько стоят 10 досок?

Пример 5

На мировом рынке нефть продается по цене 80 американских долларов за баррель. Оценить ежеквартальный объем выручки от экспорта 150 тыс. т нефти.

Пример 6

Расстояние от Приозерска до острова Валаам 51 км. За какое время преодолевает это расстояние прогулочный катер, развивающий скорость 15 узлов?

Пример 7

Во многих странах Европы температура измеряется по шкале Фаренгейта. Если в Париже 68°F, а в Москве 20°C, то где теплее?

Подобных примеров множество.

Глава 2

Первая аксиома метрологии

2.1. Априорная информация

Правильно поставленная *измерительная задача* включает указание на то, *что* нужно измерить, и *с какой неопределенностью* (раньше устанавливалась *точность* или *погрешность*).

Указание на то, что нужно измерить, содержит *априорную* (от лат. *a priori* — предшествующую опыту, в данном случае измерению) информацию. В частности, из постановки задачи должна быть ясна *размерность* измеряемой величины. Вытекает из постановки задачи и некоторое априорное представление о *размере* той величины, которую предстоит измерить. Ведь не может же он находиться в пределах от $-\infty$ до ∞!

Пусть априорное представление о размере измеряемой величины состоит в том, что ее значение Q находится где-то в интервале от Q_1 до Q_2, но чему именно оно равно в этом интервале — неизвестно. Представим эту ситуацию математической моделью, показанной на рис. 2. В качестве меры неопределенности выберем энтропию (1):

$$H_0 = -\int_{Q_1}^{Q_2} p(Q)\log[p(Q)]dQ,$$

связанную с энергией. Так как площадь, ограниченная линией плотности вероятности и осью абсцисс при любом законе распределения вероятности равна 1, в подынтегральной функции

$$p(Q) = \frac{1}{Q_2 - Q_1}.$$

Следовательно, априорная энтропия

$$H_0 = \log(Q_2 - Q_1).$$

После измерения, как показывает опыт, некоторая неопределенность относительно значения Q останется. Допустим, теперь уже можно будет сказать, что оно находится в более узком интервале от Q_3 до Q_4. Представим эту ситуацию математической моделью, показанной на рис. 5.

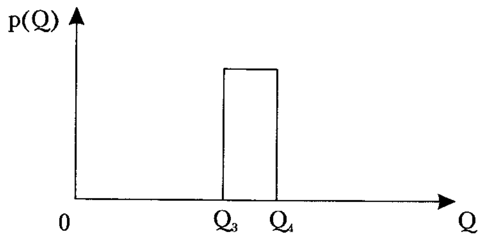


Рис. 5. Математическая модель апостериорной ситуации

Апостериорная энтропия

$$H = \log(Q_4 - Q_3).$$

Количество измерительной информации по К. Э. Шеннону

$$I = H_0 - H = \log\frac{Q_2 - Q_1}{Q_4 - Q_3}. \qquad (5)$$

Таким образом, если бы априорной информации о размере измеряемой величины не было, и интервал ее возможных значений $Q_2 - Q_1$ был бы бесконечно большим, любое измерение должно было бы давать бесконечно большое количество измерительной информации, что, в свою очередь, потребовало бы затраты бесконечно большого количества энергии, а это невозможно. Поэтому наличие априорной информации является обязательным условием измерения.

Без априорной информации измерение невозможно.

Это утверждение представляет собой **первую аксиому метрологии**. Она относится к ситуации *перед измерением* и говорит о том, что если мы не знаем, что собираемся измерять, не располагаем необходимой качественной и количественной информацией, то ничего и не узнаем. С другой стороны, если о какой-либо величине известно все (в частности, ее количественная характеристика), то измерение не нужно. Таким образом, измерение обусловлено дефицитом априорной информации о количественной характеристике какой-то величины и направлено на его уменьшение. **Измерение — это уточнение значения измеряемой величины.**

Приведенные выше рассуждения с привлечением математических моделей не относятся к доказательствам. Они служат связующим звеном между метрологической аксиоматикой и общей картиной мироздания. Аксиомы не доказываются, а являются отражением многовекового опыта, накопленного человечеством.

Для решения измерительной задачи априорная информация о размере измеряемой величины является необходимой, но не достаточной. Для того чтобы установить значение измеряемой величины с заданной неопределенностью, часто нужно располагать опытом предшествовавших измерений, хорошо знать средство измерений, учитывать влияние условий измерений и т. д. От умелого использования априорной информации, полученной из различных источников, во многом зависит успех дела.

2.2. Источники априорной информации

2.2.1. Опыт предшествовавших измерений

Если во время аналогичных измерений, выполнявшихся *ранее* одним и тем же лицом в таких же условиях и тем же самым средством измерений, были установлены неопределенность измерения и тот факт, что она не зависит от значения измеряемой величины, то с достаточной степенью уверенности можно полагать, что неопределенность будет оставаться такой же и при последующих измерениях, если квалификация измерителя не меняется, а средство измерений остается исправным.

Пример 8

Напряжение в электросети, измеренное одним вольтметром, оказалось равным 203 В, другим — 206 В. Какова неопределенность этих измерений, если опыт предшествовавших измерений теми же вольтметрами приведен в примере 1?

Решение. Стандартная неопределенность по типу А измерения[1] первым вольтметром составляет 2,37 В; вторым — 4,9 В.

2.2.2. Классы точности средств измерений

Информация о неопределенности измерений, выполняемых в повседневной практике с помощью приборов конкретного типа, получается во время испытаний этих приборов с целью утверждения типа и содержится в обозначениях их *классов точности*[2]. Обозначения наносятся на циферблаты, щитки и корпуса средств измерений, приводятся в нормативно-технических документах. В эксплуатационной документации на средство измерения, содержащей обозначение класса точности, должна быть ссылка на стандарт или технические условия, в которых установлен класс точности для этого типа средств измерений.

Обозначения могут быть в виде заглавных букв латинского алфавита (например, M, C и т. п.) или римских цифр (I, II, III, IV и т. д.) с добавлением условных знаков. Смысл таких обозначений раскрывается в нормативно-технической документации. Если же класс точности обозначается арабскими цифрами с добавлением какого-либо условного знака, то эти цифры позволяют прямо

---

[1] Термин «неопределенность измерения» является условным. Измерение — это процедура, последовательность действий, которые не имеют никакой неопределенности. Правильнее говорить «неопределенность показания», «неопределенность результата измерения», «неопределенность значения измеряемой величины» и т. п.

[2] Термин «класс точности» все еще распространен, хотя понятие точности не используется. По всей видимости, со временем он будет заменен на термин, связанный с неопределенностью. И уж конечно, он является показателем качества не средства измерений, а измерительной информации.

указать неопределенность, с которой устанавливается значение измеряемой величины.

Для измерительных приборов с равномерной, практически равномерной или степенной шкалой, нулевое значение входного (выходного) сигнала у которых находится на краю или вне диапазона измерений, обозначение класса точности арабской цифрой из ряда (1; 1,5; 2; 2,5; 4; 5; 6)$\cdot 10^n$, где n = 1, 0, –1, –2 и т. д., означает, что значение измеряемой величины не отличается от того, что показывает указатель отсчетного устройства, более чем на указанное число процентов от большего из пределов измерений. Эту ситуацию можно представить математической моделью и рассчитать неопределенность способом В.

Пример 9[1]

Указатель отсчетного устройства вольтметра класса точности 0,5, шкала которого приведена на рис. 6, показывает 124 В. Чему равно измеряемое напряжение?

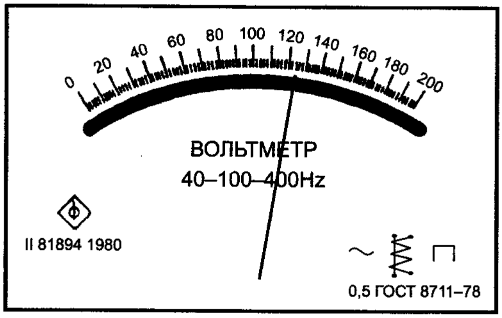


Рис. 6. Лицевая панель вольтметра класса точности 0,5 с равномерной шкалой

Решение. Для указанного прибора измеряемое напряжение не может отличаться от того, что показывает указатель, больше чем на 1 В. Следовательно, измеряемое напряжение равно 124 В со стандартной неопределенностью типа В, равной 0,58 В.

Если при тех же условиях *нулевое значение находится внутри диапазона измерений,* то значение измеряемой величины не отличается от того, что показывает указатель, больше чем на соответствующее классу точности число процентов от большего из модулей пределов измерений.

Пример 10

Указатель отсчетного устройства амперметра класса точности 1,5, шкала которого показана на рис. 7, остановился на отметке 4 А. Чему равна измеряемая сила тока?

[1] В примерах 9–14 предполагается, что остальными факторами, влияющими на результат измерения, можно пренебречь.

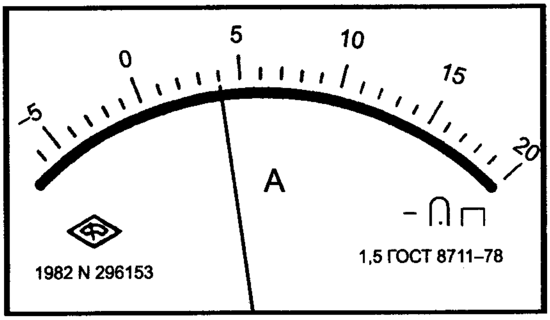


Рис. 7. Лицевая панель амперметра класса точности 1,5 с равномерной шкалой

Решение. Для указанного прибора измеряемая сила тока не может отличаться от той, которую показывает указатель, более чем на 0,3 А. Поэтому измеряемая сила тока равна 4 А со стандартной неопределенностью типа В, равной 0,17 А.

У средств измерений с установленным номинальным значением отличие значения измеряемой величины от того, что показывает указатель, не может превышать соответствующего числа процентов от номинального значения.

Пример 11

Указатель отсчетного устройства частотомера класса точности 0,2 с номинальной частотой 50 Гц, шкала которого приведена на рис. 8, показывает 51,4 Гц. Чему равна измеряемая частота?

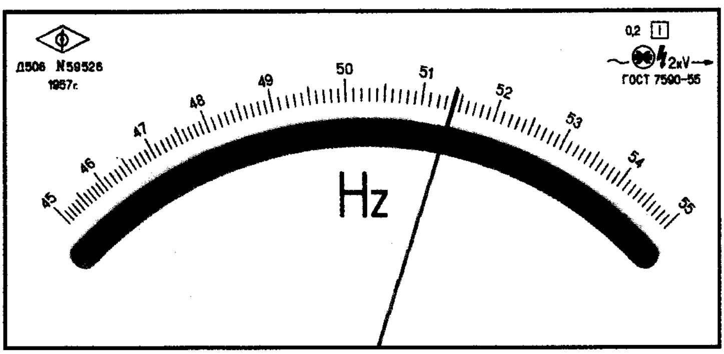


Рис. 8. Лицевая панель частотомера класса точности 0,2 с номинальной частотой 50 Гц

Решение. У такого прибора измеряемая частота не может отличаться от той, что показывает указатель отсчетного устройства, больше чем на 0,1 Гц. Следовательно, измеряемая частота равна 51,4 Гц со стандартной неопределенностью типа В, равной 0,058 Гц.

В других случаях, когда классы точности обозначаются цифрами из приведенного выше ряда, следует обращаться к стандартам на средства измерений этого типа.

Обозначение классов точности цифрами из того же ряда предпочтительных чисел может сопровождаться применением дополнительных условных знаков. Так, например, отметка снизу

$$(\underset{\vee}{0{,}5};\ \underset{\vee}{1{,}5};\ \underset{\vee}{2{,}5}\ \text{и т. п.})$$

означает, что *у измерительных приборов этого типа с существенно неравномерной шкалой* значение измеряемой величины не может отличаться от того, что показывает указатель отсчетного устройства, больше чем на указанное число процентов от всей длины шкалы или ее части, соответствующей диапазону измерений.

Пример 12

Указатель отсчетного устройства фазометра класса точности $\underset{\vee}{0{,}5}$ по верхней шкале на рис. 9 показывает 39,5°. Чему равен угол сдвига фазы между током и напряжением в электрической цепи?

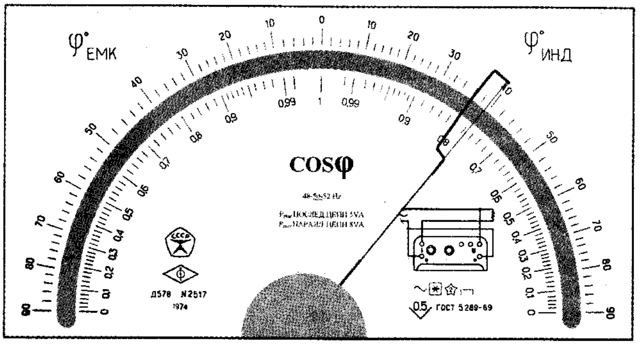


Рис. 9. Лицевая панель фазометра класса точности $\underset{\vee}{0{,}5}$ с существенно неравномерной шкалой

Решение. В данном случае угол сдвига фазы между током и напряжением не может отличаться от значения, которое показывает указатель, более чем на 0,5°. Следовательно, сдвиг фазы между током и напряжением в электрической цепи равен 39,5° со стандартной неопределенностью типа В, равной 0,3°.

Заключение цифры в окружность (например, 0,02, 0,4, 1,0, 2,0 и т. д.) означает, что проценты исчисляются непосредственно от того значения, которое показывает указатель.

Пример 13

Указатель отсчетного устройства мегомметра класса точности 2,5 с неравномерной шкалой, представленной на рис. 10, показывает 40 МОм. Чему равно измеряемое сопротивление?

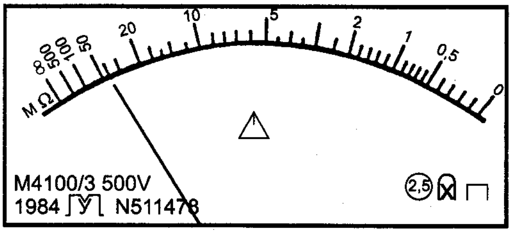


Рис. 10. Лицевая панель мегомметра класса точности (2,5) с неравномерной шкалой

Решение. При таком обозначении класса точности измеряемая величина не может отличаться от значения, которое показывает указатель, более чем на 2,5 %. Поэтому измеряемое сопротивление равно 40 МОм со стандартной неопределенностью типа В, равной 0,57 МОм.

Иногда обозначение класса точности дается в виде дроби, например 0,02/0,01. Это означает, что измеряемая величина не может отличаться от значения X, показанного указателем, больше чем на $\left[c + d\left(\left|\frac{X_k}{X}\right|\right) - 1\right]$%, где c и d — соответственно числитель и знаменатель в обозначении класса точности, а X_k — больший (по модулю) из пределов измерений.

Пример 14

Указатель отсчетного устройства ампервольтметра класса точности 0,02/0,01 со шкалой, приведенной на рис. 11, показывает –25 А. Чему равна измеряемая сила тока?

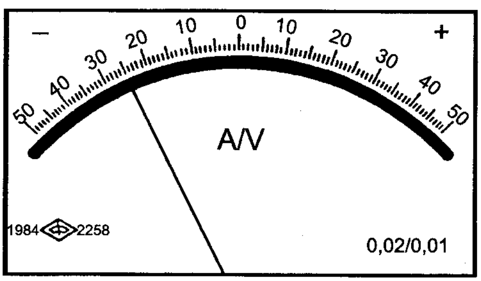


Рис. 11. Лицевая панель ампервольтметра класса точности 0,02/0,01 с равномерной шкалой

Решение. Измеряемая сила тока отличается от той, что показывает указатель, не больше чем на $\left[0{,}02 + 0{,}01\left(\left|\frac{50}{-25}\right|\right) - 1\right] = 0{,}03$ %. Таким образом, измеряемая сила тока равна –25 А со стандартной неопределенностью типа В, равной 0,0043 А.

Необходимо еще раз подчеркнуть, что **класс точности является обобщенной характеристикой всех средств измерений этого типа**. Он ни в коем случае не служит характеристикой качества конкретного измерения. Между тем во многих случаях наибольший интерес представляет качество именно конкретного измерения.

2.2.3. Условия измерений

Влияние климатических (температура окружающей среды, относительная влажность воздуха, атмосферное давление), электрических и магнитных (колебания силы электрического тока или напряжения в электрической сети, частоты переменного электрического тока, постоянные и переменные магнитные поля и др.), механических и акустических (вибрации, ударные нагрузки, сотрясения) факторов, а также ионизирующих излучений, газового состава атмосферы и т. п. принято относить к *условиям измерений*. Если их влиянием на результат измерения можно пренебречь, то такие условия измерений называются *нормальными*. Им соответствуют *номинальные значения влияющих физических величин*, главные из которых приведены в табл. 1.

Таблица 1. Номинальные значения влияющих физических величин

Влияющая величина	Номинальное значение
Температура для всех видов измерений	20 °C (293 K)
Атмосферное давление при измерении ионизирующих излучений, теплофизических, температурных, магнитных, электрических измерениях, измерении давления и параметров движения	100 кПа (750 мм рт. ст.)
То же при линейных, угловых измерениях, измерениях массы, силы света, измерениях в спектроскопии и других областях, кроме перечисленных в предыдущем пункте	101,3 кПа (760 мм рт. ст.)
Относительная влажность воздуха при линейных, угловых измерениях, измерениях массы, измерениях в спектроскопии	58 %
То же при измерении электрического сопротивления	55 %
То же при измерениях температуры, силы, твердости, переменного электрического тока, ионизирующих излучений, параметров движения	65 %
То же при остальных видах измерений	60 %
Плотность воздуха	1,2 кг/м^3
Ускорение при свободном падении	9,8 м/с^2
Магнитная индукция (напряженность магнитного поля) и напряженность электрического поля при измерении параметров движения, магнитных и электрических величин	0 Тл; 0 В/м

На практике обеспечить номинальные значения влияющих величин бывает довольно трудно. Поэтому обычно устанавливают ***пределы нормальной области*** значений влияющих величин, в границах которой влиянием их на результат измерения можно пренебречь. Так, например, во многих случаях ***нормальными условиями*** измерений считаются:

температура	(293 ± 5) К;
атмосферное давление	(100 ± 4) кПа;
относительная влажность	(65 ± 15) %;
напряжение в электрической сети	220 В ± 10 %.

Если измерения выполняются за пределами этих значений влияющих величин, то считается, что они выполняются в *рабочих условиях*. В этом случае *a priori* должны быть известны *поправки*, с помощью которых будет учитываться влияние на результаты измерений тех условий, в которых они будут проводиться.

Пример 15

Измерения линейкой из тугоплавкого сплава будут проводиться при температуре, превышающей номинальную на 1000 К. Какой будет в этом случае температурная поправка?

Решение. Зависимость длины линейки от температуры имеет вид:

$$L = L_H[1+\alpha(t-t_H)],$$

где $L_н$ и $t_н$ — длина линейки и температура, соответствующие нормальным условиям, а α — коэффициент линейного расширения материала, из которого изготовлена линейка. Поэтому результаты измерений всех линейных размеров окажутся заниженными в $(1 + 1000\alpha)$ раз (так называемая *мультипликативная поправка*, или *поправочный множитель*).

Глава 3

Вторая аксиома метрологии

3.1. Способ получения измерительной информации

«Невозможно определить или измерить одну величину иначе, как приняв в качестве известной другую величину этого же рода и указав соотношение, в котором она находится с ней» (Л. Эйлер). Эти слова великого ученого перекликаются с народной мудростью, говорящей о том, что «все познается в сравнении». Действительно, никто еще не придумал иного способа получения информации о размере физической величины, кроме как путем *сравнения* его с другим размером такой же физической величины, то есть имеющей такую же размерность. Этот факт можно сформулировать в виде **второй аксиомы метрологии**:

Измерение суть сравнение размеров опытным путем.

Вторая аксиома относится к *процедуре* измерения и говорит о том, что **сравнение размеров опытным путем является единственным способом получения измерительной информации**. При этом не уточняется, каким образом сравниваются размеры, с помощью каких приспособлений, приборов или даже может быть без них. Просто утверждается, что другого способа нет.

Вариантов сравнения между собой двух размеров $\mathbf{Q}_i$ и $\mathbf{Q}_j$ всего три:

$$\mathbf{Q}_i \gtrless \mathbf{Q}_j ; \tag{6}$$

$$\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_j = \Delta Q_{ij} ; \tag{7}$$

$$\frac{\mathbf{Q}_i}{\mathbf{Q}_j} = x_{ij} . \tag{8}$$

Первый из них — самый простой. Экспериментальное решение неравенства (6) позволяет ответить на вопрос, какой из двух размеров больше другого (либо они равны), но ничего не говорит о том, *на сколько* больше, или *во сколько раз*. Это наименее информативное измерение. Однако более полная измерительная информация иногда даже не требуется. Так, например, на рис. 12 показан вариант сравнения массы двух изделий с помощью равноплечего коромысла.

Результат измерения убедительно свидетельствует о том, что первое изделие тяжелее второго. В некоторых случаях этого вполне достаточно.

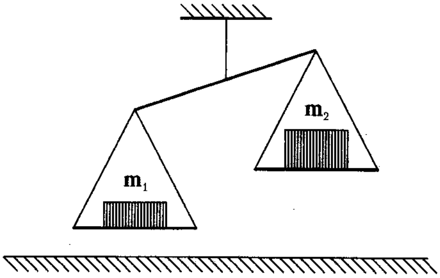


Рис. 12. Сравнение массы двух изделий

Более информативно сравнение по правилу (7). Оно позволяет получить ответ на вопрос о том, *на сколько* один размер больше или меньше другого (в частном случае они могут оказаться равными). Так, например, подсыпая песок или дробь на правую чашку (см. рис. 12), можно добиться того, что коромысло уравновесится. Тогда можно будет сказать, что масса первого изделия больше массы второго на массу дроби или песка Δm в правой чашке. А вот сказать, *во сколько раз* больше, по-прежнему будет нельзя.

Для того чтобы ответить на вопрос, *во сколько раз* один размер больше или меньше другого (опять-таки, в частном случае они могут оказаться равными), нужно сравнить размеры между собой по правилу (8), то есть посмотреть, сколько раз j-й размер укладывается в i-м. Это будет означать, что j-й размер выступает в качестве единицы измерения, а к единицам измерений предъявляются совершенно определенные требования. В частности (см. п. 1.4), для обеспечения единства измерений они должны быть установлены по определенным правилам и закреплены законодательным путем. Следовательно, измерение по правилу (8) представляет собой сравнение неизвестного размера $Q_i = Q$ с узаконенной единицей измерения $Q_j = [Q]$ с целью определения числового значения q измеряемой физической величины, которое показывает, *во сколько раз* неизвестный размер больше размера единицы, или *на сколько* единиц он больше нуля.

Таким образом, последняя разновидность способа сравнения является самой информативной. Она позволяет определить *значение измеряемой физической величины* Q, то есть выразить ее размер в общепринятых (узаконенных) единицах в кратном или дольном отношении, и отвечает на вопрос, *во сколько раз* или *на сколько* (единиц) один размер больше (меньше) другого[1].

Пример 16

Измерить массу каждого из двух изделий, показанных на рис. 12. Неопределенностью результатов измерений можно пренебречь.

---

[1] Информация о том, *во сколько раз* или *на сколько* (единиц) один размер больше (меньше) другого, может быть получена не только опытным путём, то есть посредством измерений, но и путём вычислений. В последнем случае она не является *измерительной информацией*.

Задача решается только путем экспериментального сравнения массы каждого изделия с единицей массы *килограммом* по правилу (8). Результаты измерений могут иметь вид, например:

$$m_1 = 2 \text{ кг}; m_2 = 0{,}5 \text{ кг}.$$

Пример 17

Измерить, на сколько масса первого изделия больше массы второго. Неопределенностью результата измерения можно пренебречь.

Результат измерения по правилу (7) имеет вид: на массу уравновешивающих дроби или песка Δm. Если требуется дать ответ в узаконенных единицах, то нужно *измерить* массу уравновешивающих дроби или песка. Такая задача решается только путем экспериментального сравнения этой массы с единицей массы *килограммом* по правилу (8). Результат второго измерения будет, скорее всего, иметь вид: $\Delta m = 1{,}5$ кг.

Пример 18

Рассчитать, на сколько масса первого изделия больше массы второго, использовав для этого результаты измерений, приведенные в примере 16.

Результат расчета: на 1,5 кг.

Пример 19

Рассчитать, во сколько раз масса первого изделия больше массы второго, использовав для этого результаты измерений, приведенные в примере 16.

Результат расчета: в 4 раза.

3.2. Измерительные шкалы

3.2.1. Шкала порядка

Результат экспериментального решения неравенства (6) может быть представлен на *шкале порядка*, представляющей собой упорядоченную последовательность так называемых опорных (*реперных*) точек, обозначаемых буквами, цифрами или символами и соответствующих размерам $Q_0 < Q_1 < Q_2 < Q_3 \ldots Q_n$, о каждом из которых известно, что он больше предыдущего, но меньше последующего, хотя сами размеры неизвестны (рис. 13). Если для обозначения реперных точек используются цифры, то они называются *баллами*. Само собой разумеется, что **обозначения** нельзя ни складывать, ни вычитать, ни делить, ни перемножать.

На шкале порядка не определены никакие математические операции.

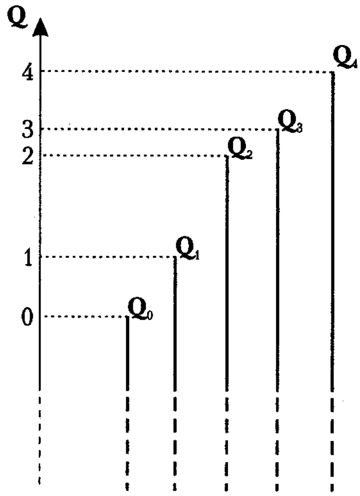


Рис. 13. Построение шкалы порядка

В то же время если один размер по шкале порядка больше другого, а последний в свою очередь больше третьего, то и первый размер больше третьего. Или если хотя бы один из двух размеров больше третьего, то их сумма тоже больше третьего размера. Если из двух размеров каждый меньше третьего, то меньше третьего размера и их разность. Эти *свойства транзитивности* означают, что **на шкалах порядка определены** (то есть могут выполняться) **логические операции.**

Так как размеры, которым соответствуют реперные точки, неизвестны, то бессмысленно говорить о каком бы то ни было масштабе на шкале порядка. Шкалы порядка вообще являются наименее совершенными, наименее информативными из всех измерительных шкал. По ним не только нельзя определить, чему равен измеряемый размер Q_i, но и невозможно сказать, на сколько (или во сколько раз) он больше или меньше размера Q_j. Тем не менее в областях, где к измерительной информации не предъявляются высокие требования, шкалы порядка применяются довольно широко. В промышленности, например, для измерений по шкалам порядка используются шаблоны. В образовательных учреждениях по шкале порядка измеряются знания учащихся:

Балл	Знания
5	Отл.
4	Хор.
3	Уд.
2	Неуд.

Другие примеры шкал порядка приведены в табл. 2–4.

Таблица 2. Шкала Бофорта для измерения силы ветра

Балл	Название	Признак
0	Штиль	Дым идет вертикально
1	Тихий	Дым идет слегка наклонно
2	Легкий	Ощущается лицом, шелестят листья
3	Слабый	Развеваются флаги
4	Умеренный	Поднимается пыль
5	Свежий	Вызывает волны на воде
6	Сильный	Свистит в вантах, гудят провода
7	Крепкий	На волнах образуется пена
8	Очень крепкий	Трудно идти против ветра
9	Шторм	Срывает черепицу
10	Сильный шторм	Вырывает деревья с корнем
11	Жестокий шторм	Большие разрушения
12	Ураган	Опустошительное действие

Таблица 3. Минералогическая шкала твердости

Балл	Твердость
0	Меньше твердости талька
1	Равна или больше твердости талька, но меньше твердости гипса
2	Равна или больше твердости гипса, но меньше твердости известкового шпата
3	Равна или больше твердости известкового шпата, но меньше твердости плавикового шпата
4	Равна или больше твердости плавикового шпата, но меньше твердости апатита
5	Равна или больше твердости апатита, но меньше твердости полевого шпата
6	Равна или больше твердости полевого шпата, но меньше твердости кварца
7	Равна или больше твердости кварца, но меньше твердости топаза
8	Равна или больше твердости топаза, но меньше твердости корунда
9	Равна или больше твердости корунда, но меньше твердости алмаза
10	Равна твердости алмаза или больше ее

Таблица 4. Международная сейсмическая шкала MSK-64 для измерения силы землетрясений

Балл	Название	Признаки
1	Незаметное	Отмечается только сейсмическими приборами
2	Очень слабое	Ощущается отдельными людьми, находящимися в состоянии покоя
3	Слабое	Ощущается лишь небольшой частью населения
4	Умеренное	Распознается по мелкому дребезжанию и колебанию предметов, посуды и оконных стекол, скрипу дверей и стен
5	Довольно сильное	Общее сотрясение зданий, колебание мебели, трещины оконных стекол и штукатурки, пробуждение спящих
6	Сильное	Ощущается всеми. Картины падают со стен, откалываются куски штукатурки, легкое повреждение зданий
7	Очень сильное	Трещины в стенах каменных домов. Антисейсмические, а также деревянные постройки остаются невредимы
8	Разрушительное	Трещины на крутых склонах и на сырой почве. Памятники сдвигаются с места или опрокидываются. Дома сильно повреждаются
9	Опустошительное	Сильное повреждение и разрушение каменных домов
10	Уничтожающее	Крупные трещины в почве. Оползни и обвалы. Разрушение каменных построек, искривление железнодорожных рельсов
11	Катастрофа	Широкие трещины в земле. Многочисленные оползни и обвалы. Каменные дома совершенно разрушаются
12	Сильная катастрофа	Изменения в почве достигают огромных размеров. Многочисленные обвалы, оползни, трещины. Возникновение водопадов, подпруд на озерах. Отклонение течения рек. Ни одно сооружение не выдерживает

3.2.1. Шкала интервалов

Результат экспериментального сравнения i-го размера с j-м по правилу (7) может быть представлен на *шкале интервалов*. Пример построения шкалы интервалов приведен на рис. 14, где в качестве j-го размера выбран второй. Если бы для сравнения были выбраны третий или четвертый размеры, то ноль сместился бы выше по шкале интервалов; если бы первый или нулевой — ниже. Таким образом, **начало отсчета на шкале интервалов не определено и зависит от выбора размера, с которым производится сравнение**. Для обеспечения единства измерений этот размер должен быть общепринятым или установленным законодательно. Так, например, по температурным шкалам Цельсия и Реомюра сравнение ведется с температурой таяния льда, по шкале Фаренгейта — с температурой смеси льда с солью и нашатырем, по шкале Кельвина — с температурой, при которой прекращается тепловое движение молекул (рис. 15).

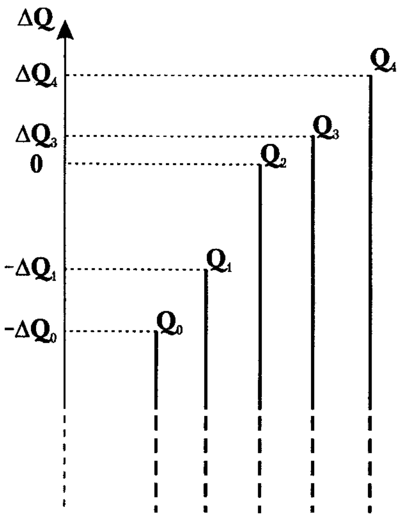


Рис. 14. Построение шкалы интервалов

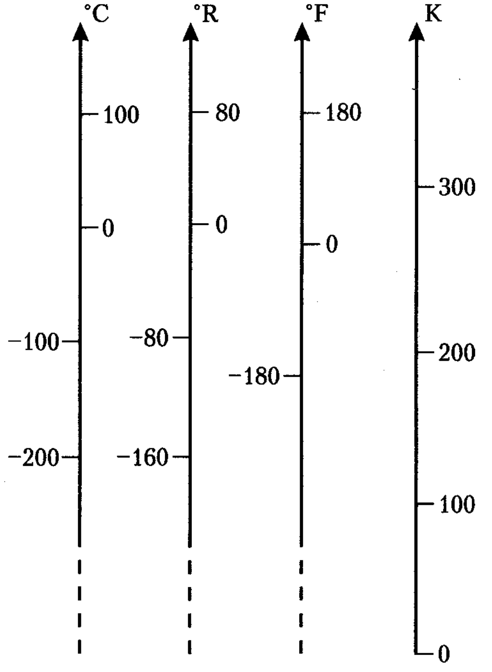


Рис. 15. Температурные шкалы Цельсия (°C), Реомюра (°R), Фаренгейта (°F) и Кельвина (K)

На шкалах интервалов уже может быть установлен *масштаб*. С этой целью, кроме начала отсчета, выбирают еще одну опорную (реперную) точку и разбивают полученный интервал между точками на определенное число делений (градаций — от лат. *gradus* — ступень). В частности, на трех температурных шкалах второй опорной точкой является температура кипения воды при номинальном значении атмосферного давления. На шкале Цельсия интервал между опорными точками разбит на 100 градаций — *градусов*; на шкале Реомюра — на 80; на шкале Фаренгейта — на 180, при том что по сравнению с предыдущими шкалами начало отсчета сдвинуто на 32°F в сторону низких температур. На шкале Кельвина в качестве второй опорной точки выбрана температура таяния льда, а интервал между реперными точками разбит на 273,16 части с тем, чтобы одна такая часть, называемая *кельвином*, в точности равнялась 1°С. Это значительно упрощает переход от одной шкалы к другой.

Градации являются единицами измерения *интервалов* между размерами, но не самих размеров физических величин. Само собой разумеется, что в качестве градаций могут использоваться узаконенные единицы измерения физических величин. Выражение интервала в тех или иных единицах измерения называется его *значением*. Интервалы можно сравнивать между собой и по принципу *на сколько* один интервал больше или меньше другого, и по принципу — *во сколько раз*. Что же касается размеров физических величин, то по шкале порядка можно получить только информацию о том, *на сколько* один размер больше или меньше другого. Если, например, второй размер больше первого на семь градаций, а третий меньше второго на две, то первый меньше третьего на пять градаций.

На шкале интервалов определены только аддитивные математические операции.

Получить информацию о том, *во сколько раз* один размер больше другого, по шкале интервалов невозможно. Для этого нужно знать сами размеры, сведений о которых на шкале интервалов нет.

Пример 20

При любом летоисчислении коренной перелом в ходе Второй мировой войны произошел под Сталинградом спустя 700 лет после разгрома Александром Невским немецких рыцарей Ливонского ордена на льду Чудского озера. Но если поставить вопрос о том, «во сколько раз» позже наступило это событие, то по нашему григорианскому стилю в $\frac{1942}{1242} \approx 1{,}56$ раза, по юлианскому календарю, отсчитывающему время от «сотворения мира», — в $\frac{7448}{6748} \approx 1{,}10$ раза, по иудейскому, где время отсчитывается от «сотворения Адама», — в $\frac{5638}{4938} \approx 1{,}14$ раза, а по магометанскому летоисчислению, начавшемуся с даты бегства Магомета из Мекки в священный город Медину, где была основана первая мусульманская община, — в $\frac{1320}{620} \approx 2{,}13$ раза.

«Во сколько раз» позже первого наступило второе событие для жителей северной части Корейского полуострова, где с 9 сентября 1997 г. отсчет времени ведется с 1912 г., когда 15 апреля родился Ким Ир Сен? Это летоисчисление называется «чучхейским» в честь идеологии чучхе, разработанной Ким Ир Сеном и являющейся официальной теорией построения коммунистического общества в КНДР.

Из рассмотренного примера и всего вышесказанного следует, что

для обеспечения единства измерений на шкале интервалов нужно иметь общепринятое или установленное законодательным путем **начало отсчета**;

для решения вопроса о том, *во сколько раз* один размер больше или меньше другого, **нужно знать сами размеры**.

Для решения первой задачи принимаются специальные меры, о характере которых можно судить по следующим примерам.

Пример 21

На заре цивилизации, когда все дороги вели в Иерусалим, паломники отсчитывали от этого святого города *расстояния* во все концы света. В одном из храмов Иерусалима до сих пор сохранился репер (опорный знак), обозначающий точку начала отсчета (ноль) всех *расстояний*.

Пример 22

В г. Берне (Швейцария) городская башня с часами служит нулевой отметкой (началом отсчета) всех *расстояний* в этой стране.

Пример 23

В конце прошлого века в Москве между Манежной и Красной площадями в проезде Вознесенские ворота в брусчатку вмонтирован знак: «Нулевой километр автодорог Российской Федерации».

Пример 24

Высоты издавна отсчитывались от уровня моря. Считалось, что на основании принципа сообщающихся сосудов уровень моря везде одинаков. Теперь известно, что это не так. Измерения со спутников показали, что в океане имеются выпуклости и впадины, отличающиеся от среднего уровня на десятки метров. Они обусловлены гравитационными аномалиями. Но раньше этого не знали.

В России наблюдения за уровнем Балтийского моря начались в Петровскую эпоху (с 1703 г.) в Финском заливе на острове Котлин. Уровень воды отмечался на шлюзных воротах и стенах Морского канала в Кронштадте. В XIX веке эти наблюдения стали систематическими, что позволило известному русскому гидрографу вице-адмиралу М. Ф. Рейнеке определить средний многолетний уровень Балтийского моря за 1825–1840 годы, зафиксированный в виде черты, выбитой на гранитном устое Синего моста через Обводный канал в Кронштадте.

Этот уровень, получивший название «нуль Кронштадтского футштока» (футшток – рейка с делениями, устанавливаемая на водомерных постах для наблюдения за уровнем воды), по предложению Главного штаба с 1872 г. стал использоваться для отсчета всех *высот* в Российской империи. Тогда же с целью передачи нулевого уровня высот на материк установили и закрепили репером в Ораниенбауме (ныне г. Ломоносов) нивелирную связь Кронштадтского футштока с континентом. В 1892 г. нивелирование повторили; для выполнения этих работ посредине между Кронштадтом и Ораниенбаумом был затоплен плашкоут, на котором установлен столик для нивелира.

Средний уровень моря подвержен вековым изменениям. Кроме того, он зависит от времени усреднения и методики обработки результатов измерений. Поэтому, несмотря на то что за более чем столетний период наблюдений средний многолетний уровень Балтийского моря в районе Кронштадта колебался в пределах не более 2 мм, известный советский океанолог и картограф почетный академик Ю. М. Шокальский предложил в качестве исходного уровня высот в стране оставить нуль Кронштадтского футштока, не связывая его в дальнейшем с уровнем моря.

В 1946 г. была введена единая система геодезических координат и высот на территории СССР, в которой нуль Кронштадтского футштока принят за начало отсчета *высот*, закрепленное фундаментальным репером в г. Ломоносове. Он стал исходным пунктом для измерения всех высот не только в СССР, но и в странах Восточной Европы в так называемой Балтийской системе высот. От него же ведется отсчет *глубин* на картах Балтийского моря, хотя, например, средний многолетний уровень моря у Датских проливов примерно на 20 см ниже, чем у Кронштадта.

Невозможность решения второго вопроса является неустранимым недостатком шкалы интервалов. Однако, как видно из выражения (7), при уменьшении размера Q_j, с которым производится сравнение, $\Delta Q_{i,j} \to Q_i$, так что $\lim\limits_{Q_i \to 0} \Delta Q_{ij} = Q_i$, то есть в пределе *шкала интервалов* $\Delta Q_{i,j}$ переходит в *шкалу размеров* Q_i. Такой, например, является температурная шкала Кельвина. По ней сравнение производится с температурой, при которой прекращается тепловое движение молекул. Это абсолютно нулевая температура; более низкой быть не может. Поэтому отрицательных температур на шкале Кельвина нет, а в положительном направлении откладываются абсолютные температуры, равные интервалу между измеряемой температурой и абсолютным нулем.

Аналогичным образом можно построить шкалу абсолютных высот, приняв за начало отсчета центр земного шара.

Если шкала интервалов переходит в шкалу размеров, то в качестве градаций естественно пользоваться единицами измерения физических величин. Отградуированная в узаконенных единицах измерения, такая шкала становится уже *шкалой значений.*

3.2.3. Шкала отношений

Шкала отношений служит для представления результатов измерений, полученных посредством экспериментального сравнения i-го размера с j-м по правилу (8). Если в качестве j-го размера выбран размер узаконенной единицы измерения [Q], то на шкале отношений откладывается числовое значение q измеряемой величины, которое показывает, *во сколько раз* ее размер $Q_i = Q$ больше размера единицы измерения, или *на сколько* единичных размеров он больше нуля:

$$q = \frac{Q}{[Q]}. \qquad (9)$$

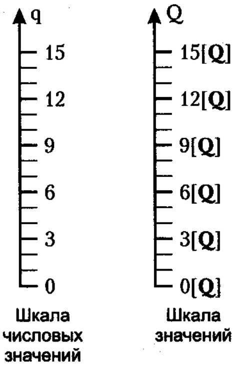


Рис. 16. Шкалы отношений

На практике вместо шкалы отвлеченных числовых значений q чаще используется шкала значений Q (рис. 16), которая отличается от шкалы размеров **Q** тем, что размеры выражены в единицах измерения [**Q**].

Шкалы отношений являются самыми совершенными, самыми информативными и самыми распространенными. На них представлена информация о самих размерах физических величин, в частности об их значениях. Это позволяет решать и *на сколько*, и *во сколько раз* один размер больше или меньше другого.

На шкалах отношений определены любые математические операции.

Полезные рассуждения

Можно ли измерить время?

Нет, так как нет начала отсчета. Можно измерить лишь *интервал* времени. В зависимости от его продолжительности он может быть разделен на меньшие интервалы и выражен в веках, годах, месяцах, днях, часах, минутах или узаконенных единицах измерения – секундах.

Можно ли измерить температуру?

Да, так как известно начало отсчета – абсолютный ноль температуры, при котором прекращается тепловое движение молекул. Узаконенной единицей измерения температуры является кельвин.

Можно ли измерить пространство?

Нет, так как нет начала отсчета. Можно измерить лишь расстояние (*интервал*) между двумя точками пространства. Узаконенной единицей измерения длины является метр.

Можно ли измерить вес?

Да, так как известно начало отсчета. Ему соответствует отсутствие взвешиваемого предмета.

Можно ли измерить плоский угол?

Да, так как известно начало отсчета. Ему соответствует параллельность образующих линий.

Глава 4
Третья аксиома метрологии

4.1. Факторы, влияющие на результат измерения

На результат измерения оказывает влияние множество факторов, точный учет которых невозможен, а результат непредсказуем. Один из вариантов классификации влияющих факторов показан на рис. 17.

До измерения (*a priori*)

- большое значение имеет качество и количество информации об измеряемой величине. Чем ее больше, чем выше ее качество – тем меньше неопределенность результата измерения. **Накопление априорной информации – один из путей повышения качества результатов измерений**;
- измерительная задача всегда формулируется по отношению к *модели объекта* или явления. Так, например, при измерении длины металлического стержня обычно считается, что он имеет форму правильного цилиндра. На самом деле расстояние между противоположными точками концевых сечений отличается от длины образующей, так что в результат измерения заранее закладывается некоторая неопределенность.

  При измерении диаметра вала должна быть уверенность в том, что он круглый. В противном случае может быть нужно измерять эллиптичность его сечения.

  При измерении площадей сельскохозяйственных угодий пренебрегают кривизной Земли, чего нельзя делать при измерении поверхности океанов.

  Измеряя плотность вещества, нужно быть уверенным в отсутствии инородных включений.

  При измерении периода обращения Земли вокруг Солнца можно заранее пренебречь его нестабильностью, а можно, наоборот, сделать ее предметом исследования.

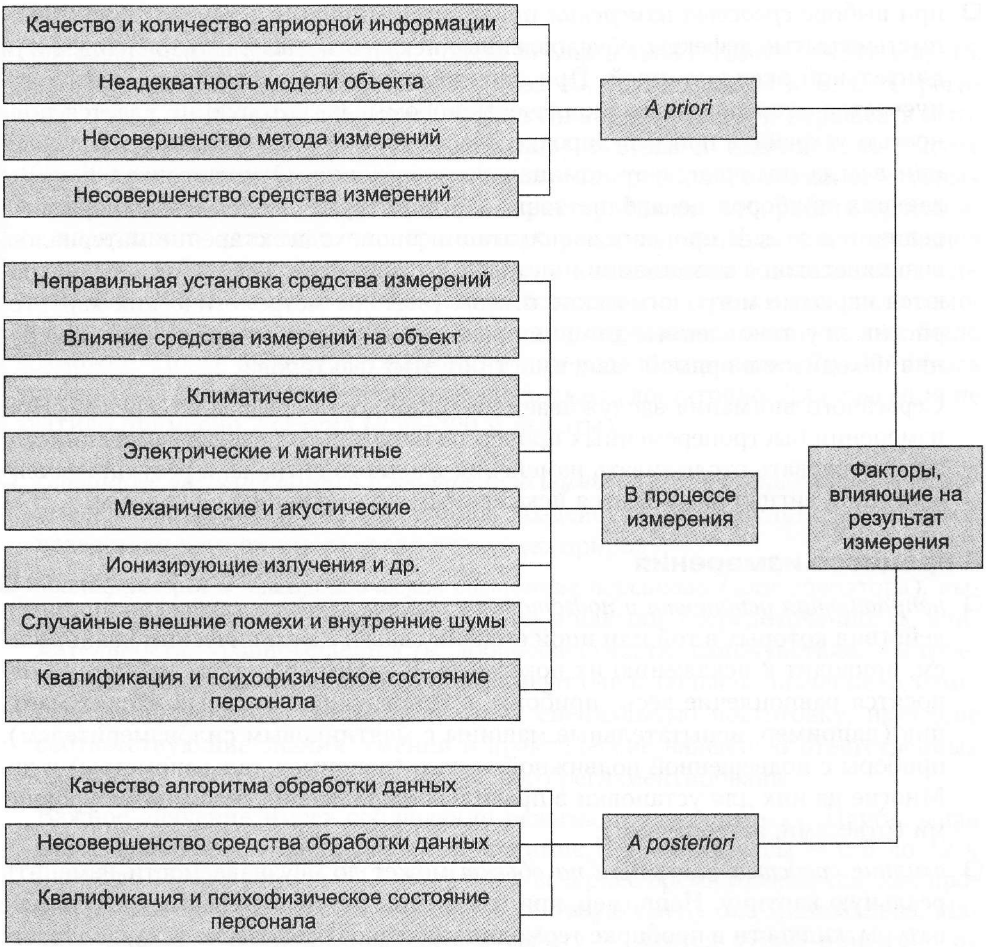


Рис. 17. Классификация влияющих факторов

Таким образом, **перед измерением необходимо представить себе модель исследуемого объекта**, которая в дальнейшем, по мере поступления измерительной информации, может изменяться и уточняться. **Чем полнее модель соответствует измеряемому объекту, тем выше качество измерительной информации**;

- в основу *метода измерения* закладываются теоретические допущения и упрощения. При взвешивании груза, например, пренебрегают выталкивающей по закону Архимеда силой, неодинаковой для груза и для гирь. При электрических измерениях часто пренебрегают паразитными емкостями, индуктивностями и сопротивлениями подводящих проводов. Нередко метод измерения бывает основан на физической закономерности, неточно передаваемой аналитическим выражением, или на приближенной эмпирической зависимости. Все это, естественно, сказывается на результате измерения;

- при выборе *средства измерения* приходится мириться с тем, что оно может иметь скрытые дефекты, обусловленные некачественным изготовлением или длительной эксплуатацией. При изготовлении весов, например, всегда допускается некоторая неравноплечесть коромысла, которую не удается полностью устранить при регулировке. Масса гирь при их серийном изготовлении всегда отличается от номинального значения. Отметки шкал показывающих приборов не вполне точно соответствуют значениям измеряемых величин и т. д. В процессе эксплуатации происходит старение материалов, возникает износ механизмов и деталей, развиваются люфты, зазоры, случаются скрытые метрологические отказы (выходы метрологических характеристик за установленные для них пределы). Понятно, что результат измерения находится в прямой зависимости от этих факторов.

  Серьезного внимания заслуживает инерционность средств измерений. При измерении быстропеременных процессов некоторые средства измерений могут не успевать отслеживать изменения входного сигнала, в результате чего выходной сигнал оказывается искаженным по сравнению с входным.

В процессе измерения

- *неправильная установка и подготовка к работе средств измерений*, принцип действия которых в той или иной степени связан с механическим равновесием, приводит к искажению их показаний. К таким средствам измерений относятся равноплечие весы, приборы, в конструкцию которых входит маятник (например, испытательные машины с маятниковым силоизмерителем), приборы с подвешенной подвижной частью (например, гальванометры) и др. Многие из них для установки в правильное положение снабжаются уровнями (отвесами, ватерпасами);
- *влияние средства измерения на объект* может до неузнаваемости изменить реальную картину. Например, при измерении ртутным термометром температуры жидкости в пробирке термодинамическое равновесие устанавливается при температуре, близкой к температуре термометра. Перераспределение токов и напряжений в электрических цепях при подключении электроизмерительных приборов иногда оказывает заметное влияние на результат измерения. Помещение первичного измерительного преобразователя в ламинарное течение делает его турбулентным и т. д.;
- *влияние на результат измерения климатических* (температура окружающей среды, относительная влажность воздуха, атмосферное давление), *электрических и магнитных* (колебания силы электрического тока или напряжения в электрической сети, частоты переменного электрического тока, постоянные и переменные магнитные поля и др.), *механических и акустических* (вибрации, ударные нагрузки, сотрясения) *факторов*, а также *ионизирующих излучений*, *газового состава атмосферы* и т. п. даже в нормальных условиях измерений все-таки проявляется, хотя им и пренебрегают. В рабочих условиях измерений учет этого влияния, как правило, бывает неточным. О том, какую роль могут играть условия измерений, говорит следующий пример.

Пример 25

При выполнении тренировочного полета 27 марта 1968 г. самолет УТИ МиГ-15, пилотируемый Героями Советского Союза Ю. А. Гагариным и В. С. Серегиным, попал в вихревой след другого реактивного самолета и перешел в штопор. В плотной облачности (8–10 баллов) с нижней границей на высоте 400–600 м летчики ориентировались только по приборам, показания которых в таких условиях носят неустойчивый характер. Кроме того, работа приемника воздушного давления на нерасчетных режимах, запаздывание сигналов в проводке к баровысотомеру и т. д. привели к завышению в показаниях высоты на 200–300 м. Полагая запас высоты достаточным, летчики выводили самолет из пикирования, не прибегая к катапультированию, пока это еще было возможно. После выхода из облачности при угле пикирования 70–90° запаса времени для катапультирования оказалось уже недостаточно. Для спасения не хватило примерно 2 секунд (250–300 м высоты);

- *случайные внешние помехи и внутренние шумы измерительных приборов* оказывают непредсказуемое совокупное воздействие на результат измерения, вследствие чего он имеет стохастическую природу;
- *квалификация и психофизическое состояние персонала* (или оператора), выполняющего измерение (знания, умения и навыки, сосредоточенность, внимательность, уравновешенность, добросовестность, самочувствие, настроение, острота зрения и многое другое), имеют очень большое значение. К измерениям допускаются лица, прошедшие специальную подготовку, имеющие соответствующие знания, умения и практические навыки. В ответственных случаях их действия должны быть строго регламентированы.

Важное значение имеет соблюдение режима труда и отдыха. Наибольшая работоспособность наблюдается в утренние и дневные часы — с 8 до 12 ч и с 14 до 17 ч. В период с 12 до 14 ч и в вечернее время отмечается, как правило, снижение работоспособности, а в ночную смену она минимальна. Начало смены — период вхождения в работу — длится утром примерно от 30 мин до 1,5 ч. Затем работоспособность стабилизируется на 1,5–2,5 ч. К середине дня начинается спад. После обеденного перерыва работоспособность снова повышается, но наивысшего уровня уже не достигает. В конце рабочего дня наступает спад, обусловленный утомлением.

Санитарно-гигиенические условия труда включают такие факторы, как микроклимат, всевозможные излучения, чистота воздуха, освещение, производственный шум, вибрация и т. п.

Острота зрения и длительность ясного видения в значительной степени зависят от условий освещения. Люди с нормальным зрением способны различать мелкие предметы лишь при освещенности 50–70 лк. Максимальная острота зрения наступает при освещенности 600–1000 лк. Освещение может быть как естественным, так и искусственным. Наиболее благоприятным является *естественное освещение*, производительность труда при котором на 10% выше, чем при искусственном. Дневной свет должен быть рассеянным и не иметь бликов. Во избежание действия солнечных лучей на окна лаборатории следует повесить белые шторы. *Искусственное освещение* помещений должно быть люминесцентным рассеянным. Источники света необходимо заключать в арматуру с матовым или молочным стеклом. В зависимости от особенностей трудового процесса применяются три системы освещения: общее (для освещения всего помещения), местное (непосредственно на рабочем месте) и комбинированное, сочетающее общее и местное. *Общее освещение* допустимо в помещении, где проводят механические измерения невысокой точности, когда направление света не играет особой роли. *Комбинированное освещение* требуется при высокоточных измерениях, когда для различения мелких деталей свет должен падать под определенным углом. Одно лишь *местное освещение* **нормами не допускается**, так как оно приводит к неравномерному распределению яркости в поле зрения наблюдателя. Это резко снижает производительность труда, увеличивает число ошибок в работе, приводит к быстрому утомлению. В оптимальных же условиях время ясного видения (с хорошей остротой) при непрерывной работе составляет 3 ч. Оно зависит от освещенности и сокращается при 50 лк на 57%, при 75 лк — на 50%, при 100 лк — на 26%, при 200 лк — на 15%.

Измерительные приборы размещают в поле зрения оператора в зоне, ограниченной углами ±30° от оси в горизонтальной и вертикальной плоскостях. Отсчетные устройства располагают перпендикулярно линии зрения оператора. Оптимальное расстояние от шкалы до глаз оператора определяют по формуле:

$$\ell = \frac{h}{tg\alpha},$$

где h — высота знака, подлежащего считыванию; α — угол зрения, равный 40–50′. Для различения отметки шкалы с угловым размером 30–40′ необходимо время 0,03 с, а с размером 3–6′ — до 0,3 с. По контрастности отметки шкал должны на порядок отличаться от фона. По данным профессора М. Ф. Маликова, в зависимости от индивидуальных особенностей операторов, связанных с их реакцией, измерительными навыками и т. п., неточность глазомерного отсчета по шкалам измерительных приборов достигает ±0,1 деления шкалы.

Уровень шума в лабораториях **не должен превышать 40...45 дБ**. Повышению производительности труда способствует функциональная музыка, снижающая утомляемость, повышающая работоспособность, улучшающая эмоциональное состояние людей, имеющая эстетическое значение. Рекомендуемая продолжительность звучания музыки за смену 1,5...2,5 ч. В музыкальные передачи должны включаться мелодичные, ненавязчивые популярные мелодии с легким и ясным музыкально-ритмическим рисунком, со спокойным темпом.

После измерения (*a posteriori*)

- от правильной *обработки экспериментальных данных* во многом зависит результат измерения;
- *технические средства*, используемые для обработки экспериментальных данных, хотя и не дают никакой новой измерительной информации, но с большим или меньшим успехом помогают извлекать ее из того, что получено опытным путем, и тем самым оказывают влияние на результат измерения;

- безграмотные, непрофессиональные или безответственные *действия персонала* (оператора) при обработке экспериментальных данных могут свести на нет любые усилия, затраченные на их получение.

> Общее отношение к влияющим факторам таково: *до измерения* их нужно по возможности **исключить**, *в процессе измерения* — по возможности **компенсировать**, а *после измерения* — по возможности **скорректировать** посредством внесения поправок.

При подготовке к измерениям

принимаются такие меры, как *термостатирование* и *кондиционирование*. Они могут быть местными (для средств измерений или отдельного блока, узла) и общими для всего помещения; естественными (за счет использования архитектурных особенностей здания) и искусственными (если используются электронагревательные приборы или холодильники, кондиционеры). Для защиты от электрических, магнитных и электромагнитных полей применяется *экранирование*. С целью устранения вибраций и сотрясений применяется *амортизация* (эластичные подвесы, пружины, губчатая резина); воздействие акустических помех ослабляется в *заглушенных камерах*; влияние перепадов атмосферного давления — в *барокамерах* и т. п.

Средства измерений располагаются так, чтобы они не влияли друг на друга.

Пример 26

Координаты северного магнитного полюса, расположенного в Северо-Американском архипелаге (примерно 74,8° северной широты и 99,6° западной долготы), и южного магнитного полюса в Антарктиде (примерно 67,5° южной широты и 140° восточной долготы) не совпадают с географическими полюсами Земли. Поэтому не совпадают между собой истинные (географические) и магнитные меридианы. Угол d в плоскости горизонта между истинным и магнитным меридианами называется *магнитным склонением*. Он может иметь значения от 0 до π радиан и отсчитывается, как показано на рис. 18, от северной части истинного меридиана в восточном направлении со знаком плюс или в западном — со знаком минус. Если курс корабля определяется по магнитному компасу, то к углу между линией курса и направлением на северный магнитный полюс добавляется *поправка*, равная магнитному склонению, взятому со своим знаком.

Магнитные полюса перемещаются вокруг географических, вызывая так называемые вековые изменения магнитного поля Земли и, соответственно, магнитного склонения. Период вековых изменений магнитного склонения достигает нескольких сотен лет, а амплитуда доходит до 1/6 рад. На морских навигационных картах приводится магнитное склонение на определенный год и его последующее ежегодное изменение. По этим данным и рассчитывается поправка, закономерно изменяющаяся с течением времени.

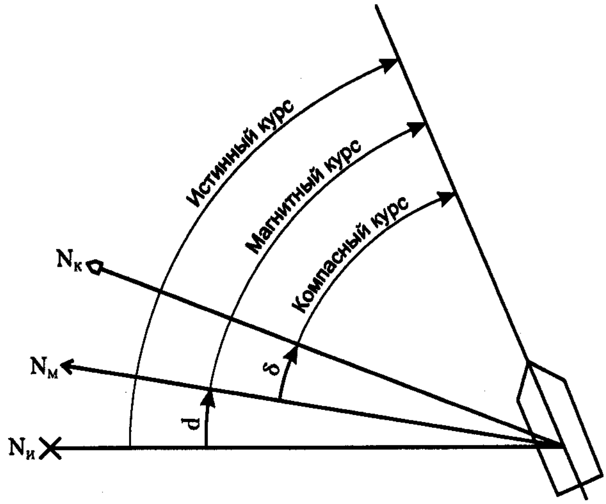


Рис. 18. Определение курса корабля по магнитному компасу

При выполнении измерений

- для исключения прогрессирующего влияния какого-либо фактора, являющегося линейной функцией времени (например, постепенного прогрева аппаратуры, падения напряжения в цепи питания, вызванного разрядом аккумуляторов или электрических батарей, потери эмиссии катодов радиоламп и т. п.), применяется *метод симметричных измерений.* Он заключается в том, что в течение некоторого интервала времени выполняется несколько измерений одного и того же размера и затем берется полусумма отдельных результатов, симметричных по времени относительно середины интервала. Разброс полусумм будет следствием влияния случайных внешних помех и внутренних шумов измерительных приборов, но прогрессирующее воздействие влияющего фактора на результат измерения окажется исключенным: это воздействие будет таким же, как в середине интервала. В дальнейшем его можно компенсировать поправкой;
- для исключения некоторых влияющих факторов используется *метод замещения.* Он состоит в замене измеряемой величины равновеликой ей вещественной мерой, значение которой известно. Реакция средства измерений при этом должна остаться такой же. Например, при взвешивании груза на равноплечих весах его масса считается равной массе уравновешивающих гирь. Однако это справедливо только при строгом равенстве плеч, так как равновесие коромысла определяется не равенством сравниваемых масс, а равенством произведений силы на плечо. На практике плечи строго не равны между собой. Поэтому груз уравновешивается не равным ему по массе набором гирь. При использовании метода замещения тот же груз уравновешивается любой тарой, а потом заменяется набором гирь, при котором сохраняется равновесие коромысла. Очевидно, что масса груза в таком случае равна массе гирь, а влияние неравноплечести весов оказывается исключенным.

Точно так же, включив измеряемое сопротивление в мостовую схему и уравновесив ее, заменяют его затем магазином сопротивлений и, подбирая сопротивление магазина, восстанавливают равновесие моста. Высокое качество измерения сопротивления этим методом обеспечивается за счет исключения остаточной неуравновешенности мостовой схемы, взаимного влияния ее элементов, утечек и других паразитных факторов;

- *компенсация влияющего фактора по знаку* осуществляется следующим образом. Измерение проводится дважды так, чтобы влияющий фактор оказывал противоположное действие, и берется среднее арифметическое двух опытов. Например, механические узлы некоторых средств измерений имеют люфты, влияние которых компенсируется, если измерительный механизм подводить к измеряемой величине сначала со стороны больших, а затем со стороны меньших значений (или наоборот). Можно скомпенсировать влияние постоянных магнитных полей, паразитных термоЭДС и т. п.;
- если влияющий фактор приводит не к изменению измеряемого значения на некоторую величину, а к умножению его на некоторый коэффициент, то вместо компенсации по знаку применяется *метод противопоставления*. Рассмотрим его на примере взвешивания на равноплечих весах.

Условие равновесия коромысла записывается следующим образом:

$$m \times \ell_1 = m_г \times \ell_2,$$

где m — масса взвешиваемого груза; $m_г$ — масса уравновешивающих гирь, а ℓ_1 и ℓ_2 — длины соответствующих плеч коромысла. Таким образом, влияние неравноплечести коромысла проявляется в наличии множителя ℓ_2/ℓ_1:

$$m = \frac{\ell_2}{\ell_1} m_г.$$

Если повторить взвешивание, поместив груз на чашку весов, на которой ранее были гири, получим:

$$m'_г \times \ell_1 = m \times \ell_2,$$

где $m'_г \neq m_г$. Разделив первое условие равновесия на второе, найдем, что

$$\frac{m}{m'_г} = \frac{m_г}{m},$$

откуда $m = \sqrt{m'_г \times m_г}$, или, с достаточной степенью точности,

$$m = \frac{m_г + m'_г}{2},$$

то есть влияние неравноплечести коромысла оказывается исключенным.

После выполнения измерений

с целью компенсации влияющих факторов, которые не удалось скомпенсировать до конца во время выполнения измерений, в экспериментальные данные вносятся *поправки*, которые могут быть аддитивными и мультипликативными (поправочными множителями), могут иметь точные или ориентировочные значения, могут быть функциями времени или влияющих величин.

Пример 27

В магнитном поле Земли корабельная сталь намагничивается, и вокруг корабля создается собственное магнитное поле. Под его влиянием магнитный компас указывает направление, отличающееся от направления на северный магнитный полюс. Угол δ в плоскости горизонта между магнитным и компасным меридианами называется *девиацией магнитного компаса*. Девиация, как показано на рис. 18, отсчитывается от северной части магнитного меридиана в восточном направлении со знаком плюс, а в западном — со знаком минус и может принимать значение от 0 до π радиан. Периодически ее уничтожают с помощью специальных магнитов-компенсаторов и железа, но так как девиация зависит от курса корабля и географической широты его места, то полностью уничтожить ее для всех условий невозможно. Остаточную девиацию на разных курсах определяют экспериментально, сравнивая компасные направления с известными. Таблица девиации входит в «Справочные таблицы штурмана». По ней находят *поправку* δ, которая при определении курса корабля по магнитному компасу алгебраически суммируется с магнитным склонением.

Пример 28

Мощность подземных ядерных взрывов находится по магнитудам прямых и поверхностных сейсмических волн (рис. 19). Магнитудой называется отношение логарифма амплитуды сейсмической волны к расстоянию до места ее возбуждения. Сама по себе магнитуда не определяет мощности взрыва. Откалибровать ее как характеристику мощности ядерного взрыва можно только по экспериментальным данным. На рис. 20 приведены калибровочные линии, построенные по точкам, соответствующим подземным взрывам известной мощности, проводившимся в СССР, США и Алжире. Поглощение и затухание прямых волн сильнее, чем поверхностных, и зависит от температуры на глубине от 25 до 150 км под полигоном. При нанесении соответствующих точек на рис. 20 учтено, что испытательный полигон в Неваде расположен в районе, где за последние несколько миллионов лет произошли геологические изменения, сопровождавшиеся деформацией и нагреванием пород. Поэтому прямые сейсмические волны сжатия от подземных взрывов в штате Невада затухают сильнее, а магнитуды их меньше, чем у прямых сейсмических волн от взрывов в местах, не подвергавшихся геологически недавнему подогреву. Если непосредственно использовать соотношение между магнитудой и мощно-

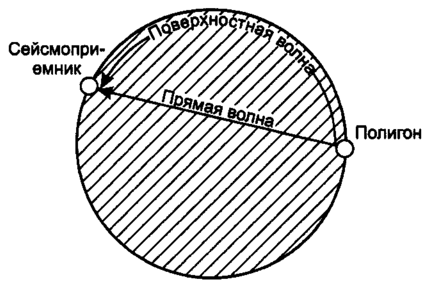


Рис. 19. Распространение сейсмических волн при подземном ядерном взрыве

стью взрыва в штате Невада для оценки мощности ядерных взрывов на территории Советского Союза или в других регионах с малым затуханием, то результаты измерений окажутся завышенными в 2–4 раза. До 1966 г. при определении экспертами правительства США мощности советских ядерных взрывов эта поправка не учитывалась. Так создавался и поддерживался миф о военном превосходстве СССР в области стратегических ядерных вооружений.

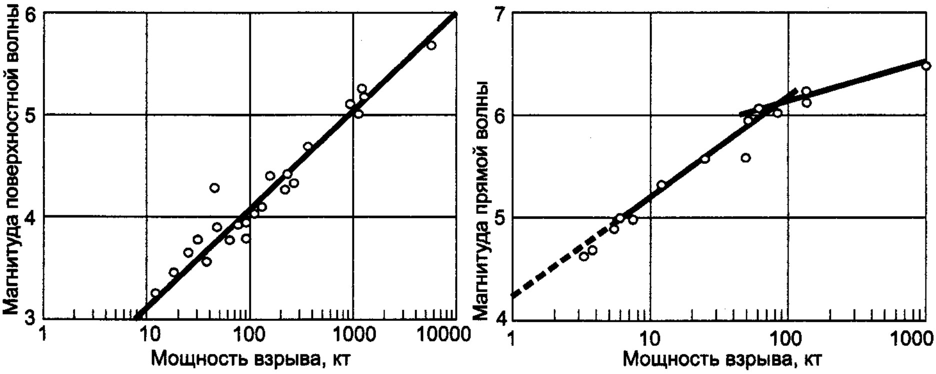


Рис. 20. Магнитуды сейсмических волн при подземных ядерных взрывах

Пример 29

Согласно общей теории относительности, свет, проходя вблизи тел большой массы, отклоняется под влиянием их гравитационного поля от своего первоначального направления. В результате в угловые координаты некоторых звезд, полученные посредством измерений, приходится вносить так называемые *релятивистские поправки*. Их значения определяются расчетным путем. Правильность расчетов можно проверить экспериментально. Для этого измеряют, например, отклонение луча света Солнцем. На фоне Солнца звезды не видны, поэтому измерения проводят во время полного солнечного затмения. Схема наблюдений показана на рис. 21.

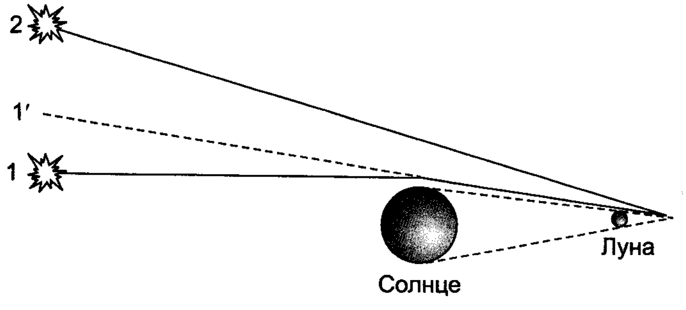


Рис. 21. Изменение направления распространения света при прохождении его луча вблизи Солнца

Так как свет от звезды 1 отклоняется Солнцем, она видна в точке 1′, смещенной в направлении звезды 2. Впервые это явление наблюдал Эддингтон 29 мая 1919 г. во время полного солнечного затмения. Угловое смещение 1,75″, измеренное Эддингтоном, совпало с расчетным значением релятивистской поправки, взятой с обратным знаком.

Пример 30

При измерении ЭДС вольтметром внутреннее сопротивление источника питания R_i обычно не учитывается. Между тем показание вольтметра U связано с измеряемой ЭДС соотношением:

$$U = \frac{R}{R_i + R}E,$$

где R — внутреннее сопротивление вольтметра. Таким образом, даже при простейшем измерении ЭДС вольтметром его показание должно умножаться на поправочный множитель

$$\frac{R_i + R}{R},$$

определяемый расчетным путем.

Пример 31

По измеренным значениям электрического тока, протекающего через сопротивление, и падению напряжения на нем требуется рассчитать значение этого сопротивления.

На рис. 22 показаны два возможных варианта включения измерительных приборов.

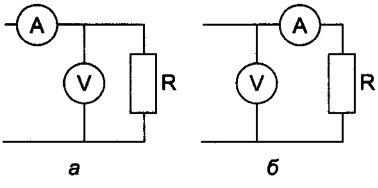


Рис. 22. Возможные схемы включения вольтметра и амперметра для определения значения сопротивления R расчетным путем

В первом случае из показания амперметра нужно вычесть ток, протекающий через вольтметр (см. рис. 22, *а*). При большом значении сопротивления R, соизмеримом с внутренним сопротивлением вольтметра или даже превышающем его, эта поправка значительна.

Во втором случае из показания вольтметра нужно вычесть падение напряжения на амперметре (см. рис. 22, *б*). Эта поправка значительна при небольших значениях R, меньших внутреннего сопротивления амперметра или соизмеримых с ним.

На практике схемы, показанные на рис. 22, *а* и *б*, применяют соответственно при небольших и при больших значениях R, когда указанными поправками можно пренебречь.

При окончательном оформлении результатов измерений

учет влияющих факторов заключается в том, что из-за невозможности их полного исключения и компенсации результаты измерений представляются с некоторой неопределенностью.

4.2. Результат измерения

Совместное влияние множества различных факторов, точный учет которых невозможен, а итог непредсказуем, приводит к тому, что результат измерения оказывается случайным. Это положение может быть сформулировано в виде **третьей аксиомы метрологии**:

Результат измерения без округления является случайным.

Такое утверждение не является чем-то необычным. Все события в нашей жизни, обусловленные множеством обстоятельств, являются случайными. *Вероятность* наступления реального события может быть высокой или низкой, какой-нибудь другой, но она никогда не равна нулю или единице.

Стохастический характер реальных событий и явлений — закон природы. Этим реальность отличается от теоретических абстракций, где в качестве математических моделей часто используются аналитические зависимости. В случаях, когда элемент случайности в событиях и явлениях проявляется особенно явно, **для математического моделирования** используется *теория вероятностей.* Адекватным математическим аппаратом **для описания реальных случайных событий и явлений** служит *математическая статистика.*

Пример 32

На рис. 23 показан результат стрельбы по круговой мишени из стрелкового оружия.

Теоретически при тщательном прицеливании попадание должно быть в центр мишени.

На практике из-за влияния множества факторов, точный учет которых невозможен, а итог непредсказуем, наблюдается рассеяние пробоин, то есть результат стрельбы, представленный массивом экспериментальных данных, имеет некоторую неопределенность. Количественно она оценивается способом А.

Математической моделью случайного по своей природе результата стрельбы служит двумерный закон распределения вероятности пробоин на круговой мишени.

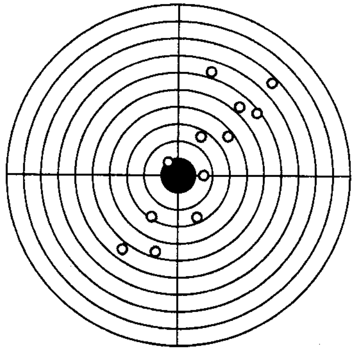


Рис. 23. Результат стрельбы по круговой мишени из стрелкового оружия

Третья аксиома метрологии — одно из проявлений всеобщего закона природы. В случайности результата измерения нетрудно убедиться, предложив кому-нибудь измерить периметр здания или внутреннего помещения в нем. При повторных выполнениях измерительной процедуры все время будут получаться разные значения результата измерения, если не проводить при этом округление. В том же самом можно убедиться при измерении мгновенных значений электрического напряжения или силы постоянного электрического тока, если не загрублять показания вольтметра и амперметра.

При измерении по шкале порядка результатом измерения является экспериментальное *решение* неравенства (6). Согласно третьей аксиоме метрологии, оно является случайным. Особенно явно случайный характер решения проявляется при незначительном различии между сравниваемыми размерами. При неоднократном повторении процедуры сравнения в этом случае возможны другие решения. При явном несоответствии сравниваемых размеров случайным характером решения можно пренебречь.

При измерении по шкале интервалов случайным является размер интервала. При повторных выполнениях измерительной процедуры он всякий раз будет получаться несколько иным.

При измерении по шкале отношений случайным является результат сравнения по правилу (8). При сравнении неизвестного размера $Q_i = Q$ с узаконенной единицей измерения $Q_j = [Q]$

$$\frac{Q}{[Q]} = x \neq q.$$

Этим **реальная** измерительная процедура отличается от ее **теоретической модели** (9). Результат **экспериментального** сравнения неизвестного размера Q с узаконенной единицей измерения [Q] (он называется *отсчетом*) не только не равен неслучайному числовому значению измеряемой величины q, но имеет совершенно иную физическую природу. Это безразмерное случайное число x, подчиняющееся тому или иному закону распределения вероятности.

Отсчетные устройства большинства средств измерений проградуированы не в безразмерных числовых значениях q, а непосредственно в значениях измеряемой величины Q (см. рис. 16). Отклик таких средств измерений на входное воздействие называется *показанием*:

$$X = x[\mathbf{Q}], \tag{10}$$

которое отличается от неслучайного значения Q физической величины (4) тем, что является случайной величиной, подчиняющейся тому же закону распределения вероятности, что и отсчет, но имеющей размерность, совпадающую с размерностью измеряемой величины.

В показание средств измерений могут вноситься *поправки*, учитывающие влияние тех или иных факторов (см. примеры 26–31). В таких случаях только после внесения в показание поправки можно говорить о получении *результата измерения*. При мультипликативной поправке θ, называемой *поправочным множителем*, результат измерения

$$Q = \theta X, \tag{11}$$

в случае внесения аддитивной поправки θ

$$Q = X + \theta. \tag{12}$$

И в том и в другом случае результат измерения остается случайным.

Из третьей аксиомы метрологии вытекает важное *следствие*:

Результат измерения не имеет конкретного значения.

Ни при каких обстоятельствах, например, нельзя сказать, что результат измерения длины составляет 102,5 см или результат измерения силы тока равен 12,7 А. Это отдельные значения каждого из результатов измерений. Представление же о самих результатах измерений можно составить лишь на основе анализа массивов экспериментальных данных, полученных при измерении длины и силы электрического тока.

Массив экспериментальных данных, полученных независимым путем, наиболее полно характеризует результат измерения. Единственным способом формирования такого массива **без предварительных условий** является <u>одновременное измерение физической величины несколькими средствами измерений.</u> Поскольку точность[1] измерений, выполняемых разными приборами, неодинакова, такое измерение называется *измерением с неравноточными значениями отсчета*.

При условии, что значение измеряемой величины не меняется во времени или этим изменением можно пренебречь, массив экспериментальных данных проще получить путем <u>многократного повторения измерительной процедуры</u>

---

[1] Здесь, как и ранее (см. сноску на с. 21), используется устоявшийся термин, который со временем будет, вероятно, изменен.

одним и тем же средством измерений. Такое измерение называется *измерением с равноточными значениями отсчета.*

Если исследуемый объект передается из одной лаборатории в другую (как это было, например, при изучении лунного грунта, доставленного на Землю советскими автоматическими станциями и американскими астронавтами), то массив экспериментальных данных может быть сформирован из *нескольких серий* равноточных и неравноточных измерений.

При условии, что измеряемые размеры одинаковы у разных экземпляров (образцов) изделия или их различием можно пренебречь (такие экземпляры называются *идентичными*), в единый массив экспериментальных данных объединяются значения отсчета (показания), полученные любым из перечисленных выше способов для каждого экземпляра.

4.3. Формы представления результата измерения

4.3.1. Результат измерения по шкале порядка

При измерении по шкале порядка массивом экспериментальных данных является множество решений неравенства (6) опытным путем. В зависимости от измерительной задачи сравнение неизвестного размера $Q = Q_i$ может производиться с одним или двумя известными размерами Q_j.

Сравнение с одним размером

При сравнении с одним единственным размером Q_1, которому на шкале порядка соответствует единственная реперная точка, варианты решений выглядят следующим образом:

$$Q < Q_1;$$
$$Q = Q_1;$$
$$Q > Q_1.$$

Если различие между Q и Q_1 невелико (или, тем более, ничтожно), массив экспериментальных данных будет состоять из всех этих вариантов, один из которых (правильный) должен быть преобладающим, если все факторы, влияющие на результат измерения, являются случайными. Тогда можно найти эмпирическую вероятность правильного решения и записать результат измерения в таком, например, виде[1]:

$$\boxed{Q > Q_1 \text{ с вероятностью } P = 0{,}92.}$$

Полезные рассуждения

Если на измерительную процедуру оказывает влияние постоянно действующий фактор, в результате измерения должна содержаться соответствующая

[1] Иногда неравенство и равенство объединяют, как, например, в табл. 3.

поправка. Предположим, *a priori* известно, что при сравнении массы двух изделий с помощью равноплечего коромысла (см. рис. 12) на самом деле длина одного плеча составляет 10 см, а второго — 9,95 см. Тогда условие равновесия коромысла записывается следующим образом:

$$10\,m_1 = 9{,}95\,m_2,$$

и в показание, представленное на рис. 12, должна быть внесена мультипликативная или аддитивная поправка. Если это показание правильное, то в массиве экспериментальных данных будут преобладать, соответственно, неравенства

$$m_1 > 0{,}995\,m_2,$$

или

$$m_1 > m_2 - 0{,}005\,m_2.$$

После вычисления эмпирической вероятности правильного результата измерения с учетом мультипликативной поправки он мог бы быть записан, предположим, в таком виде:

$$m_1 > 0{,}995\,m_2 \text{ с } P = 0{,}94,$$

а с учетом аддитивной поправки — в виде

$$m_1 > m_2 - 0{,}005\,m_2 \text{ с } P = 0{,}94.$$

Решение, принятое без учета поправки:

$$m_1 > m_2 \text{ с } P = 0{,}94$$

было бы неправильным.

Теперь предположим, что показание средства измерений («равноплечего» коромысла) противоположно тому, которое показано на рис. 12, и что это показание является правильным. Тогда решение, принятое без учета поправки:

$$m_1 < m_2 \text{ с } P = 0{,}94$$

будет неправильным, а решения:

$$m_1 < 0{,}995\,m_2 \text{ с } P = 0{,}94,$$

$$m_1 < m_2 - 0{,}005\,m_2 \text{ с } P = 0{,}94$$

— правильными.

Без учета поправки результат измерения является неправильным.

Это не означает, конечно, что не бывает случаев, когда во внесении поправки нет необходимости.

Особую роль играет сравнение с размером $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{0}$. Это так называемая задача *обнаружения*. Вариантов ее решения всего два:

$$\mathbf{Q} = 0;$$
$$\mathbf{Q} > 0.$$

Средства измерений, решающие задачу обнаружения, называются *индикаторами.*

Сравнение с двумя размерами

Если по условиям измерительной задачи ее решение должно состоять в указании интервала на шкале порядка, в пределах которого находится измеряемый размер, то сравнение производится с двумя размерами, и результат измерения может выглядеть, например, следующим образом:

$$\boxed{\mathbf{Q}_1 < \mathbf{Q} < \mathbf{Q}_2 \text{ с } P = 0{,}81,}$$

где размеры $\mathbf{Q}_j$ (j = 1,2) соответствуют соседним реперным точкам, а вероятность P равна произведению вероятностей выполнения левого и правого неравенств.

Так как неравенства могут объединяться с равенствами, то интервал от $\mathbf{Q}_1$ до $\mathbf{Q}_2$ может быть не только открытым, но и закрытым с одной или с двух сторон. Например:

$$\boxed{\mathbf{Q}_1 \le \mathbf{Q} < \mathbf{Q}_2 \text{ с } P = 0{,}85;}$$

$$\boxed{\mathbf{Q}_1 < \mathbf{Q} \le \mathbf{Q}_2 \text{ с } P = 0{,}87;}$$

$$\boxed{\mathbf{Q}_1 \le \mathbf{Q} \le \mathbf{Q}_2 \text{ с } P = 0{,}9.}$$

Соответственно в первом случае первый сомножитель при расчете вероятности, с которой принимается решение, равен сумме вероятностей равенства и неравенства; во втором — это относится ко второму сомножителю; в третьем — к обоим.

Поправка может вноситься в левое и правое неравенства одна и та же (как, например, при использовании не совсем равноплечего коромысла), а может быть разной при сравнении с первым и вторым размерами. Это отражается в записи результата измерения.

Варианты решений:

1. Сила ветра от 7 до 8 баллов с вероятностью 0,81.
2. Сила ветра не менее 5 баллов, но не достигает 6 (с вероятностью 0,85).
3. Сила ветра больше 6 и достигает 7 баллов (с вероятностью 0,87).
4. Сила ветра 6–7 баллов с вероятностью 0,9.

4.3.2. Результат измерения по градуированным шкалам

На практике шкалы интервалов и отношений обычно проградуированы в узаконенных единицах измерения. Поэтому массивы экспериментальных данных представляют собой множества значений, подчиняющихся тому или иному закону распределения вероятности.

У цифровых измерительных приборов эти значения строго фиксированы, и промежуточных быть не может. У аналоговых средств измерений указатель отсчетного устройства может остановиться в любом месте шкалы. Соответственно, законы распределения вероятности, которым подчиняются экспериментальные данные, могут быть дискретными или непрерывными.

Имея в виду последующие процедуры (10), (11) или (12), для общности рассуждений ограничимся рассмотрением законов распределения вероятности отсчета.

Цифровые измерительные приборы

У цифровых измерительных приборов отсчет x_i подчиняется дискретному закону распределения вероятности. Эмпирические законы распределения вероятности отличаются от теоретических тем, что являются случайными функциями. Роль вероятности $P(x_i)$ в эмпирических законах играет доля значений x_i в общем объеме экспериментальных данных.

Пример 33

Массив из n = 100 экспериментальных данных, полученных с помощью цифрового измерительного прибора, представлен в табл. 5. Каждое i-е число x_i повторяется m_i раз. Что представляет собой отсчет при таком измерении?

Таблица 5

i, j	x_i	m_i	$P(x_i)$	$F(x_j)$
1	90,10	1	1/100 = 0,01	0,01
2	90,11	2	2/100 = 0,02	0,01 + 0,02 = 0,03
3	90,12	5	5/100 = 0,05	0,03 + 0,05 = 0,08
4	90,13	10	10/100 = 0,10	0,08 + 0,10 = 0,18
5	90,14	20	20/100 = 0,20	0,18 + 0,20 = 0,38
6	90,15	24	24/100 = 0,24	0,38 + 0,24 = 0,62
7	90,16	19	19/100 = 0,19	0,62 + 0,19 = 0,81
8	90,17	11	11/100 = 0,11	0,81 + 0,11 = 0,92
9	90,18	5	5/100 = 0,05	0,92 + 0,05 = 0,97
10	90,19	2	2/100 = 0,02	0,97 + 0,02 = 0,99
11	90,20	1	1/100 = 0,01	0,99 + 0,01 = 1,00

Решение. Отсчет представлен множеством своих случайных значений, содержащихся во второй графе табл. 5. Частость (эмпирическая вероятность $P(x_i) = m_i$ / n) каждого значения приведена в четвертой графе. В совокупности эти две графы дают *эмпирическое распределение вероятностей отсчета*, показанное на рис. 24. ***Функция эмпирического распределения вероятностей отсчета*** $F(x_j) = \sum_{i=0}^{j} P(x_i)$, устанавливающая совокупную вероятность всех $x_i \le x_j$, представлена данными во втором и последнем столбцах таблицы. Графически она построена на рис. 25.

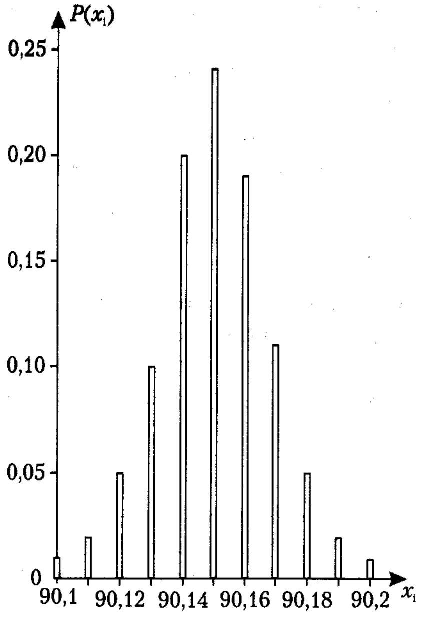


Рис. 24. Распределение вероятностей отсчета у цифрового измерительного прибора

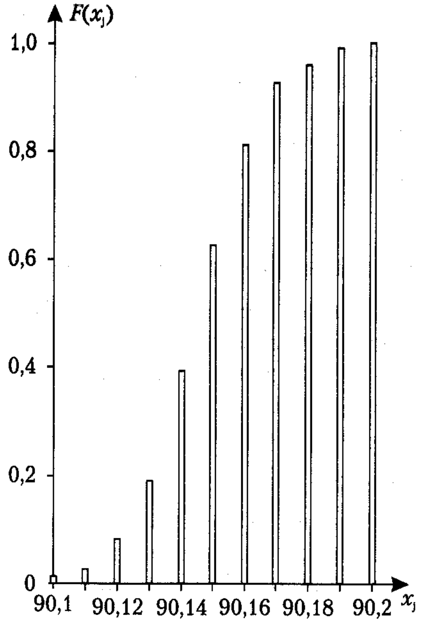


Рис. 25. Функция распределения вероятностей отсчета у цифрового измерительного прибора

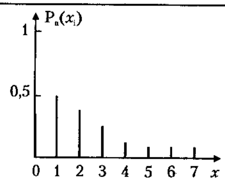
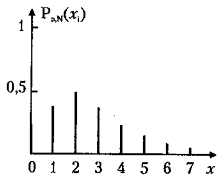
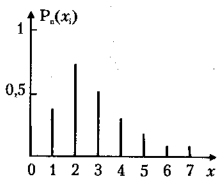
Массив экспериментальных данных, эмпирическое распределение вероятностей $P(x_i)$ и функция эмпирического распределения вероятностей $F(x_j)$ **являются наиболее полными и исчерпывающими способами описания отсчета у цифровых измерительных приборов любой конструкции.**

Сведения о некоторых теоретических законах дискретного распределения вероятностей приведены в табл. 6, где C_n^x — число сочетаний из n элементов по x, а остальные обозначения соответствуют принятым в п. 6.1.

Аналоговые измерительные приборы

У аналоговых измерительных приборов отсчет x подчиняется непрерывному закону распределения вероятности. Эмпирические законы распределения вероятности и в этом случае отличаются от теоретических тем, что являются случайными функциями. Измерительная информация содержится не в распределении вероятности дискретных значений отсчета x_i, а в *плотности вероятности* текущих значений x.

Таблица 6

Закон	График	Распределение вероятностей	Функция распределения вероятностей	Числовые характеристики
Биноминальный		$P_n(x_i) = C_n^{(x_i)} P^{x_i}(1-P)^{n-x_i} = \frac{n!}{x_i(n-x_i)} P^{x_i}(1-P)^{n-x_i}$	$F(x, n, P) = \sum_{x_i=0}^{x} P_n(x_i)$	$\mathbf{M}(x) = nP$ $\mathbf{D}(x) = nP(1-P)$
Гипергеометрический		$P_{n,N}(x_i) = \frac{C_{N_Б}^{x_i} \cdot C_{N-N_Б}^{n-x_i}}{C_N^n}$, где $N_Б = NP$	$F(x, n, N, P) = \sum_{x_i=0}^{x} P_{n,N}(x_i)$	$\mathbf{M}(x) = nP$ $\mathbf{D}(x) = nP(1-P)_{N-1}^{N-n}$
Пуассона		$P_n(x_i) = \frac{(nP)^{x_i}}{x_i!} e^{-nP}$	$F(x, n, P) = \sum_{x_i=0}^{x} P_n(x_i)$	$\mathbf{M}(x) = nP$ $\mathbf{D}(x) = nP$

Пример 34

Массив экспериментальных данных, полученных с помощью аналогового измерительного прибора, представлен в табл. 7.

Таблица 7

i, k	Деление шкалы	m_i	$p_i(x)$	$F_k(x)$
1	0,10 ... 0,11	1	1/100 = 0,01	0,01
2	0,11 ... 0,12	2	2/100 = 0,02	0,01 + 0,02 = 0,03
3	0,12 ... 0,13	6	6/100 = 0,06	0,03 + 0,06 = 0,09
4	0,13 ... 0,14	11	11/100 = 0,11	0,09 + 0,11 = 0,20
5	0,14 ... 0.15	19	19/100 = 0,19	0,20 + 0,19 = 0,39
6	0,15 ... 0,16	23	23/100 = 0,23	0,39 + 0,23 = 0,62
7	0,16 ... 0,17	20	20/100 = 0,20	0,62 + 0,20 = 0,82
8	0,17 ... 0,18	10	10/100 = 0,10	0,82 + 0,10 = 0,92
9	0,18 ... 0,19	5	5/100 = 0,05	0,92 + 0,05 = 0,97
10	0,19 ... 0,20	3	3/100 = 0,03	0,97 + 0,03 = 1,00

При n-кратном независимом друг от друга повторении измерительной процедуры указатель отсчетного устройства m_i раз останавливался в каждом из делений шкалы, приведенных во второй графе табл. 7. Что представляет собой отсчет при таком измерении?

Решение. Отсчет представлен множеством своих случайных значений, сгруппированных в k = 10 интервалах. Построив на каждом i-м интервале Δx прямоугольник, площадь которого равна частости $\frac{m_i}{n}$ (эмпирической вероятности) попадания случайного значения отсчета в этот интервал, получим *гистограмму* (эмпирическую плотность вероятности $p_i(x) = \frac{m_i}{n\Delta x}$), показанную на рис. 26. ***Функция эмпирического распределения вероятности*** $F_k(x) = \sum_{i=0}^{k} p_i(x)$, устанавливающая совокупную вероятность отсчета x во всех интервалах $i \le k$, показана на рис. 27.

Массив экспериментальных данных, плотность эмпирического распределения вероятности (гистограмма) $p_i(x)$ и функция эмпирического распределения вероятности $F_k(x)$ **являются наиболее полными и исчерпывающими способами описания отсчета у аналоговых измерительных приборов любой конструкции.**

При $n \to \infty$, $k \to \infty$ и $\Delta x \to 0$ гистограмма $p_i(x)$ переходит в кривую плотности теоретического закона распределения вероятности $p(x)$, а $F_k(x)$ — в кривую функции теоретического закона распределения вероятности $F(x)$. Сведения о некоторых законах приведены в табл. 8.

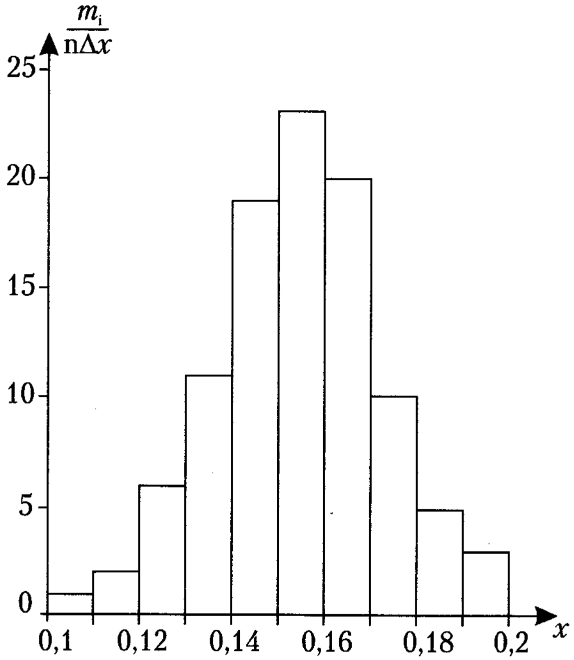


Рис. 26. Гистограмма плотности вероятности отсчета у аналогового измерительного прибора

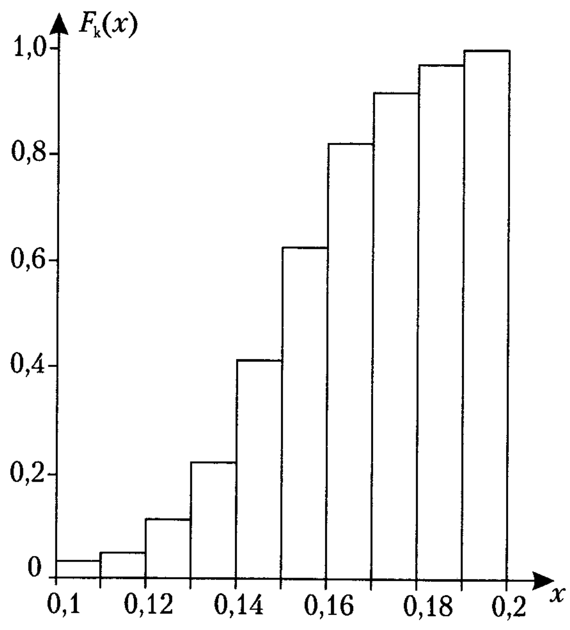
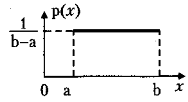
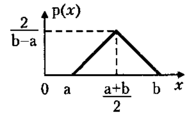
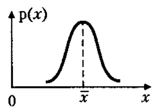
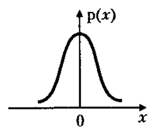
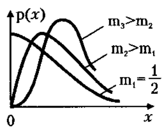
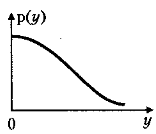
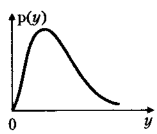
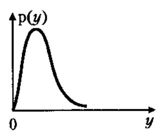
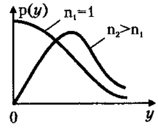


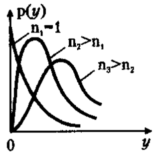
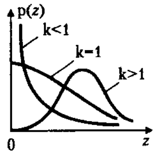
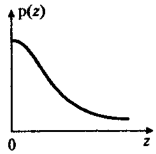
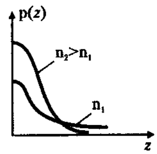
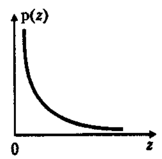
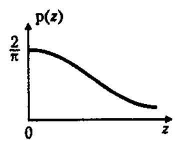
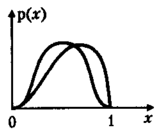
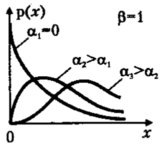
Рис. 27. Функция распределения вероятности отсчета у аналогового измерительного прибора

Таблица 8

Закон	График плотности вероятности	Дифференциальная функция
Равномерный		$p(x)=\frac{1}{b-a},\ a<x<b$
Треугольный (Симпсона)		$p(x)=\begin{cases}\frac{4(x-a)}{(b-a)^2},\ a<x<\frac{a+b}{2}\\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2},\ \frac{(a+b)}{2}<x<b\end{cases}$
Нормальный (Гауса)		$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$
Нормированный нормальный		$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$
Накагами		$p(x)=\frac{2}{\Gamma(m)}m^m\frac{x^{2m-1}}{\sigma^{2m}}e^{-m\frac{x^2}{\sigma^2}};$ $m\geq\frac{1}{2}$
Распределение модуля нормальной случайной величины $X=x-\bar{x}$		$p(y)=\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$
Рэлея		$p(y)=\frac{y}{\sigma^2}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$
Максвелла		$p(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{\sigma^3}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$
χ-распределение модуля многомерного нормального вектора		$p(y)=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{y^{n-1}}{(2\sigma^2)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$

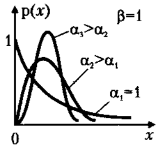
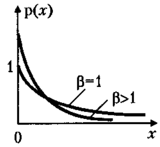
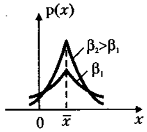
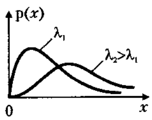
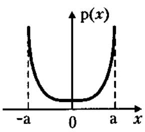
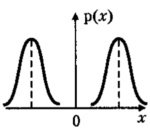
Интегральная функция	Энтропия	Дополнительные сведения
$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x<b\\ 1, & x>a\end{cases}$	$H(x)=\log(b-a)=$ $=\log(\sigma 2\sqrt{3})$	$\sigma^2=\dfrac{(b-a)^2}{12}$ Стандартизированная длина половины доверительного интервала – 1,7σ
$F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<a,\\ \dfrac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, & a<x<a+b,\\ 1-\dfrac{2(b-x)^2}{(b-a)^2}, & \dfrac{a+b}{2}<x<b,\\ 1, & b<x<\infty\end{cases}$	$H(x)=\log\dfrac{(b-a)\sqrt{e}}{2}=$ $=\log(\sigma\sqrt{6e})$	Композиция двух одинаковых равномерных законов. $\sigma^2=\dfrac{(b-a)^2}{24}$ Стандартизированная длина половины доверительного интервала – 2,4σ
$F(x_0)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x_0} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}dx$	$H(x)=\log(\sigma\sqrt{2\pi e})$	Композиция любого числа нормальных или большого числа произвольных законов. Стандартизированная длина половины доверительного интервала – 3σ
$F(x_0)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x_0} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$	$H(x)=\log\sqrt{2\pi e}$	$\bar{x}=0;\ \sigma^2=1$ Табулирован
$F(x)=\dfrac{\Gamma\left(m, m\dfrac{x^2}{\sigma^2}\right)}{\Gamma(m)}$		
$F(y)=\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{y^2}{2\sigma^2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)}$	$H(y)=\log\left(\sigma\sqrt{\dfrac{2\pi e}{2}}\right)$	Получается из распределения Накагами при $m=\frac{1}{2}$ $y=\lvert x-\bar{x}\rvert=\sqrt{X^2}$ $p(X)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$
$F(y)=1-e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}};\ y>0$	$H(y)=\left(1+\dfrac{c}{2}\right)\log e$, где $c=0{,}5772...$ — число Эйлера	$y=\sqrt{X_1^2+X_2^2}$ Стандартизированная длина половины доверительного интервала – 3,3σ
$F(y)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{y^2}{2\sigma^2}\right)$		$y=\sqrt{X_1^2+X_2^2+X_3^2}$
$F(y)=\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2},\dfrac{y^2}{2\sigma^2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)};y>0$		$y=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2}$

Таблица 8 (*продолжение*)

Закон	График плотности вероятности	Дифференциальная функция
χ^2-распределение (Пирсона)		$p(y)=\frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{y^{\frac{n}{2}-1}}{\sigma^n}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$
z-распределение		$p(z)=\frac{2k}{B\left(\frac{m}{2};\frac{n}{2}\right)}\frac{z^{km-1}}{\left(1+z^{2k}\right)^{\frac{m+n}{2}}}$
ν-распределение		$p(z)=\frac{2}{B\left(\frac{m}{2};\frac{n}{2}\right)}\frac{z^{m-1}}{\left(1+z^{2}\right)^{\frac{m+n}{2}}}$
Стьюдента		$p(z)=\frac{2}{B\left(\frac{1}{2};\frac{n}{2}\right)}\frac{1}{\left(1+z^{2}\right)^{\frac{1+n}{2}}}$
Фишера		$p(z)=\frac{1}{B\left(\frac{m}{2};\frac{n}{2}\right)}\frac{z^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1+z\right)^{\frac{m+n}{2}}}$
Коши		$p(z)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+z^2}$
Бета-распределение		$p(x)=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$
Гамма-распределение (Эрланга)		$p(x)=\frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha}e^{-\beta x}$

Интегральная функция	Энтропия	Дополнительные сведения
$F(y)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2},\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}; y>0$	При $\sigma = 1$ $H(y)=\log\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)+$ $+\log 2+\left[\frac{n}{2}-(\frac{n}{2}-1)\psi\left(\frac{n}{2}\right)\right]\log e$, где $\psi(z)=\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)$ — пси-функция Эйлера	$y=\sum_{i=1}^{n} X_i^2$
$F(z)=1-I_{\frac{1}{1+z^{2k}}}\left(\frac{m}{2};\frac{n}{2}\right)$		$z^k=\dfrac{\sqrt{\sum_{j=1}^{m} X_j^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} X_i^2}}$
$F(z)=1-I_{\frac{1}{1+z^{2}}}\left(\frac{m}{2};\frac{n}{2}\right)$		Получается из z-распределения при $k = 1$
$F(z)=1-I_{\frac{1}{1+z^{2}}}\left(\frac{1}{2};\frac{n}{2}\right)$		Получается из z-распределения при $k = m = 1$
$F(z)=1-I_{\frac{1}{1+z}}\left(\frac{m}{2};\frac{n}{2}\right)$		Получается из z-распределения при $k=\frac{1}{2}$
$F(z)=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} z$	$H(z)=\log 4\pi$	Получается из z-распределения при $k = m = n = 1$ $\sigma^2=\infty$
$F(x)=I_x(\alpha,\beta)$		
$F(x)=\dfrac{\Gamma(\alpha+1,\beta x)}{\Gamma(\alpha+1)}$	$H(x)=\log\Gamma(\alpha+1)-\alpha\log e\psi(\alpha+1)+$ $+(\alpha+1)\log e+\log\frac{1}{\beta}$, где $\psi(\alpha+1)$ — пси-функция Эйлера	

Таблица 8 (*продолжение*)

Закон	График плотности вероятности	Дифференциальная функция
Вейбулла		$p(x) = \alpha\,\beta\,x^{\alpha-1}\,e^{-\beta x^{\alpha}}$
Экспоненциальный односторонний (показательный)		$p(x) = \beta\,e^{-\beta x}$
Экспоненциальный двусторонний (Лапласа)		$p(x) = \frac{\beta}{2}\,e^{-\beta\lvert x-\bar{x}\rvert}$
Показательно-степенной		$p(x) = \frac{x^{\lambda}}{\lambda\,!}\,e^{-x}$
Арксинуса		$p(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}$
Двухмодальный		$p(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}}\left[e^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} + e^{\frac{-(x+\bar{x})^2}{2\sigma^2}}\right]$

Необходимые сведения из теории вероятностей

1. Функция распределения вероятности $F(x)$ определяет вероятность того, что случайная переменная x примет значение, меньшее аргумента этой функции (или равное ему).
2. Так как вероятность не может быть отрицательной,

$$F(x) \geq 0.$$

Чем больше x, тем больше вероятность того, что это значение не будет превышено. Следовательно, $F(x)$ — неубывающая функция:

$$F(x_2) \geq F(x_1), \text{ если } x_2 \geq x_1.$$

При изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ функция распределения вероятности $F(x)$ меняется от 0 до 1.

Интегральная функция	Энтропия	Дополнительные сведения
$F(x)=1-e^{-\beta x^{\alpha}}$		При $\alpha = 2$, $\beta=\frac{1}{2\sigma^2}$ переходит в распределение Рэлея
$F(x)=1-e^{-\beta x}$	$H(x)=\log\frac{e}{\beta}=\log(\sigma e)$	Получается из распределения Вейбулла при $\alpha = 1$
$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\beta(x-\bar{x})}, & -\infty<x<\bar{x}\\ 1-\frac{1}{2}e^{-\beta(x-\bar{x})}, & \bar{x}<x<\infty\end{cases}$	$H(x)=\log\frac{2e}{\beta}=\log(\sigma e\sqrt{2})$	
$F(x)=\frac{\Gamma(\lambda+1,x)}{\Gamma(\lambda+1)}$	$H(x)=\log\lambda!-\lambda\log e\left(\sum_{\mu=2}^{\lambda}\frac{1}{\mu}-c\right)+$ $+\log e$, где c = 0,5772... — число Эйлера	
$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a}$	$H(x)=\log\pi+\frac{1}{\pi}\int_0^a\log\frac{(a^2+x^2)}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$	$\bar{x}=0$; $\sigma^2=\frac{a^2}{2}$
$F(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x_0}e^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}dx+$ $+\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x_0}e^{\frac{-(x+\bar{x})^2}{2\sigma^2}}dx$	$H(x)=\log 2+\log(\sigma\sqrt{2\pi e})$	Композиция нормального и дискретного законов распределения вероятности

3. Вероятность всех значений текущей переменной x, меньших или равных x_2, составляет $F(x_2)$, а меньших или равных x_1 — равна $F(x_1)$. Поэтому вероятность значений, лежащих внутри интервала $[x_1; x_2]$, равна разности значений $F(x)$ на границах этого интервала:

$$P\{x_1 \le x \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

Значения x_1 и x_2 можно выбирать сколь угодно близкими друг к другу. При $x_1 \to x_2$ $F(x_2) - F(x_1) \to 0$. Поэтому

у аналоговых измерительных приборов вероятность того, что указатель отсчетного устройства остановится на какой-либо конкретной точке шкалы, равна 0.

По той же причине

$$P\{x_1 \le x \le x_2\} = P\{x_1 < x \le x_2\} = P\{x_1 \le x < x_2\} = P\{x_1 < x < x_2\},$$

то есть крайние точки можно включать, а можно и не включать в интервал.

4. Плотность вероятности $p(x)$ связана с функцией распределения вероятности $F(x)$ соотношением:

$$p(x) = F'(x).$$

Поэтому $p(x)$ называют иногда *дифференциальной функцией распределения вероятности*. В свою очередь $F(x)$ может быть получена интегрированием $p(x)$ в соответствующих пределах:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx.$$

Геометрическая интерпретация этой операции показана на рис. 28, а $F(x)$ называют иногда *интегральной функцией распределения вероятности*.

5. Так как $F(x)$ — неубывающая функция, ее производная не может быть отрицательной:

$$p(x) \ge 0.$$

6. Вероятность значений x, лежащих внутри интервала $[x_1; x_2]$, равна площади, ограниченной графиком функции $p(x)$, осью абсцисс и перпендикулярами к ней, восстановленными на краях интервала (см. рис. 28):

$$P\{x_1 \le x \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx.$$

7. При расширении интервала $[x_1; x_2]$ до бесконечности вероятность того, что любое случайное значение x окажется в этом интервале, становится равной 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1.$$

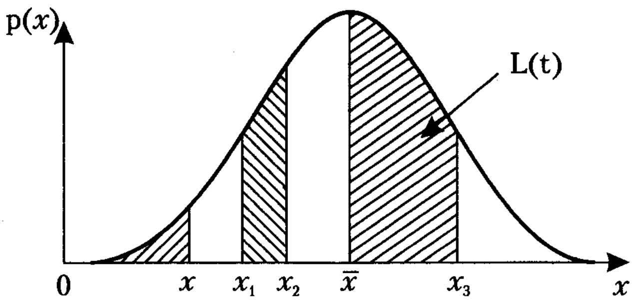


Рис. 28. Дифференциальная функция распределения вероятности

8. Вероятность значений x, лежащих в окрестности среднего значения $[\bar{x}; x_3]$, **при нормальном законе распределения вероятности** равна функции Лапласа

$$L(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

от аргумента $t = \frac{x_3 - \bar{x}}{\sigma}$ (см. рис. 28). При t = 0 эта функция равна 0, а при увеличении t стремится к 0,5, становясь практически неотличимой от этого значения уже при t ≥ 3 (табл. 9).

Таблица 9

t	L(t)	t	L(t)	t	L(t)	t	L(t)	t	L(t)
0,01	0,0040	0,12	0,0478	0,55	0,2088	1,10	0,3643	2,10	0,4821
02	0080	14	0557	60	2257	1,20	3849	2,20	4861
03	0120	17	0675	65	2422	1,30	4032	2,30	4893
04	0160	20	0793	70	2580	1,40	4192	2,40	4918
05	0199	25	0987	75	2734	1,50	4332	2,50	4938
06	0239	30	1179	80	2881	1,60	4452	2,60	4953
07	0279	35	1368	85	3023	1,70	4554	2,70	4965
08	0319	40	1554	90	3159	1,80	4641	2,80	4974
09	0359	45	1736	95	3289	1,90	4713	2,90	4981
10	0398	50	1915	1,00	3413	2,00	4772	3,00	4987

Описание случайных чисел с помощью функций распределения вероятности является наиболее полным, но неудобным. Во многих случаях ограничиваются указанием *числовых характеристик* (*моментов*) законов распределения вероятности. Все они представляют собой некоторые средние значения, причем если усредняются числа, отсчитываемые от начала координат, то моменты называются *начальными*, а если от центра закона распределения — *центральными*.

Общее правило образования начальных моментов:

$$\overline{x^r} = \int_{-\infty}^{\infty} x^r p(x)dx,$$

где r — номер момента. **Важнейшим начальным моментом является первый** — *среднее значение*

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x\,p(x)dx,$$

называемое также *математическим ожиданием*. Иногда его обозначают **M**(x). Свойства математического ожидания:

1) математическое ожидание неслучайного числа равно самому этому числу:

$$\mathbf{M}(x) = x;$$

2) постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$\mathbf{M}(\mathrm{a}x) = \mathrm{a}\mathbf{M}(x), \text{ где } \mathrm{a} = \mathrm{const};$$

3) математическое ожидание алгебраической суммы случайных чисел равно алгебраической сумме их математических ожиданий:

$$\mathbf{M}(x + y - z) = \mathbf{M}(x) + \mathbf{M}(y) - \mathbf{M}(z);$$

4) математическое ожидание произведения независимых случайных чисел равно произведению их математических ожиданий

$$\mathbf{M}(x \cdot y \cdot z) = \mathbf{M}(x) \cdot \mathbf{M}(y) \cdot \mathbf{M}(z);$$

5) математическое ожидание отклонения случайного числа от его математического ожидания равно нулю:

$$\mathbf{M}[x - \mathbf{M}(x)] = 0.$$

Математическое ожидание определяет местоположение случайного числа (то есть всего массива его значений) на числовой оси. Оно относится к так называемым **характеристикам положения**, среди которых на практике находят применение еще *мода* — наиболее вероятное значение случайного числа, и *медиана* — значение, по отношению к которому вероятность больших и меньших значений одинакова.

Мерой рассеяния случайных чисел около их среднего значения **служит второй центральный момент.**

Общее правило образования центральных моментов записывается следующим образом:

$$\overline{(x - \bar{x})^{\mathrm{r}}} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^{\mathrm{r}} \mathrm{p}(x)\mathrm{d}x,$$

откуда сразу видно, что первый центральный момент тождественно равен нулю:

$$\overline{(x - \bar{x})} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})\mathrm{p}(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{p}(x)\mathrm{d}x - \bar{x}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{p}(x)\mathrm{d}x = \bar{x} - \bar{x} = 0.$$

Второй центральный момент называется *дисперсией* и обозначается σ_x^2:

$$\sigma_x^2 = \overline{(x - \bar{x})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 \mathrm{p}(x)\mathrm{d}x.$$

Иногда дисперсию удобнее обозначать символом $\mathbf{D}(x)$. Свойства дисперсии:

1) дисперсия случайного числа равна разности между математическим ожиданием его квадрата и квадратом математического ожидания:

$$\mathbf{D}(x) = \mathbf{M}(x^2) - \mathbf{M}^2(x);$$

2) дисперсия неслучайного числа равна нулю: $\mathbf{D}(x) = 0$;

3) постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его при этом в квадрат:

$$\mathbf{D}(ax) = a^2\mathbf{D}(x),\ \text{где } a = \text{const};$$

4) дисперсия алгебраической суммы двух случайных чисел

$$\mathbf{D}(x \pm y) = \mathbf{D}(x) + \mathbf{D}(y) \pm 2\rho\sqrt{\mathbf{D}(x)\cdot\mathbf{D}(y)},$$

где *коэффициент корреляции*

$$\rho = \frac{\mathbf{M}\{[x-\mathbf{M}(x)][y-\mathbf{M}(y)]\}}{\sqrt{\mathbf{D}(x)\mathbf{D}(y)}};$$

5) дисперсия алгебраической суммы независимых случайных чисел равна арифметической сумме их дисперсий:

$$\mathbf{D}(x + y - z) = \mathbf{D}(x) + \mathbf{D}(y) + \mathbf{D}(z).$$

Чем больше дисперсия, тем значительнее рассеяние случайного числа относительно центра рассеяния. Иллюстрацией может служить рис. 29, на котором показаны линии плотности вероятности нормального закона с математическим ожиданием $\bar{x}$ и дисперсиями $\sigma^2_{x_1} < \sigma^2_{x_2} < \sigma^2_{x_3}$.

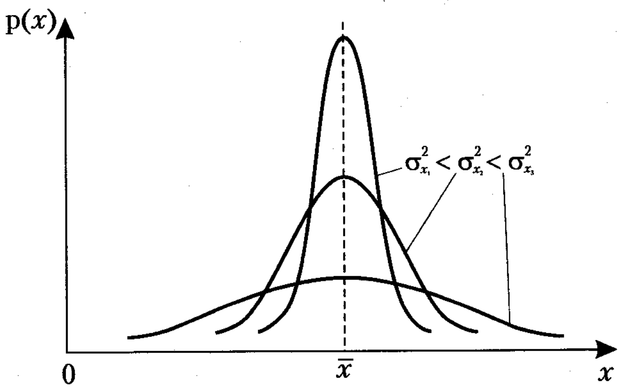


Рис. 29. Графики плотности вероятности отсчета при различной дисперсии

В метрологии по рекомендациям международных организаций (см. п. 1.1) в качестве **меры неопределенности** используется *среднее квадратическое отклонение*

$$\sigma_x = +\sqrt{\sigma_x^2}.$$

В теории информации, в теории связи, в физике и многих ее приложениях в качестве **меры неопределенности** используется *энтропия*

$$\mathrm{H}(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{p}(x)\log \mathrm{p}(x)\mathrm{d}x -$$

среднее значение логарифма плотности вероятности, взятое со знаком минус. Так как $p(x) < 1$, энтропия всегда положительна. Она равна 0 у неслучайного числа и максимальна при равномерной плотности вероятности.

Все без исключения моменты, будучи числовыми характеристиками законов распределения вероятности случайных чисел, сами случайными не являются. Использование их было бы очень удобным, но из-за ограниченного объема экспериментальных данных вычисление моментов невозможно. На практике пользуются *оценками* (приближенными значениями) числовых характеристик, получаемыми методами *математической статистики.*

Оценки, изображаемые точкой на числовой оси, называются *точечными.* В отличие от самих числовых характеристик **оценки являются случайными**, причем их значения зависят от объема экспериментальных данных, а законы распределения вероятности — от законов распределения вероятности самих случайных величин. Оценки должны удовлетворять трем требованиям: быть состоятельными, несмещенными и эффективными. *Состоятельной* называется оценка, которая сходится по вероятности к оцениваемой числовой характеристике. *Несмещенной* является оценка, математическое ожидание которой равно оцениваемой числовой характеристике. Наиболее *эффективной* считают ту из нескольких возможных несмещенных оценок, которая имеет наименьшее рассеяние.

Рассмотрим n независимых значений Q_i, полученных при измерении физической величины постоянного размера. Пусть каждое из них отличается от среднего значения на случайное отклонение δ_i, которое может быть как положительным, так и отрицательным:

$$\begin{gathered} Q_1 = \overline{Q} + \delta_1; \\ Q_2 = \overline{Q} + \delta_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_i = \overline{Q} + \delta_i; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_n = \overline{Q} + \delta_n. \end{gathered}$$

Сложив между собой левые и правые части этих уравнений и разделив их на n, получим:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Q_i = \overline{Q} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i.$$

В пределе при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Q_i = \lim_{n\to\infty}\overline{Q} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i.$$

Здесь

$$\lim_{n\to\infty}\overline{Q} = \overline{Q}; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i = 0,$$

так что **среднее арифметическое значение результата измерения**

$$\hat{\bar{Q}}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Q_i,$$

сходящееся по вероятности к $\bar{Q}$, при любом законе распределения вероятности результата измерения может служить состоятельной точечной оценкой среднего значения.

Математическое ожидание среднего арифметического

$$\mathbf{M}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Q_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}(Q_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\mathbf{M}(\bar{Q}) + \mathbf{M}(\delta_i)\right] = \bar{Q}.$$

Поэтому, **среднее арифметическое** при любом законе распределения вероятности результата измерения **является не только состоятельной, но и несмещенной оценкой среднего значения**. Этим обеспечивается *правильность* результата многократного измерения.

Точность результата многократного измерения зависит от эффективности оценки среднего значения. Чем она эффективнее (чем меньше ее рассеяние), тем выше точность. Критерии эффективности могут быть разными. При нормальном законе распределения вероятности наиболее популярным является такой показатель эффективности (мера рассеяния), как сумма квадратов отклонений оценки $\hat{\bar{Q}}$ от среднего значения $\bar{Q}$. Чем меньше этот показатель, тем эффективнее оценка. Это позволяет поставить задачу отыскания оценки среднего значения $\hat{\bar{Q}}_j$, наиболее эффективной по критерию

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\hat{\bar{Q}}_j - \bar{Q}\right)^2 = \min.$$

Такая задача называется *задачей синтеза оптимальной* (то есть наилучшей в смысле выбранного критерия) *оценки среднего значения*, а метод ее решения, основанный на использовании выбранного критерия — **методом наименьших квадратов**.

Исследуем функцию в левой части последнего выражения на экстремум. Она достигает минимума при

$$\frac{d\sum_{j=1}^{m}\left(\hat{\bar{Q}}_j - \bar{Q}\right)^2}{d\hat{\bar{Q}}_j} = 0.$$

После возведения в квадрат и почленного дифференцирования получим:

$$\sum_{j=1}^{m}\hat{\bar{Q}}_j - m\bar{Q} = 0.$$

Если в качестве оценки $\hat{\bar{Q}}_j$ выбрать среднее арифметическое $\hat{\bar{Q}}_n$, то равенство

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n} Q_i\right) - m\bar{Q} = 0$$

будет выполняться при $n \to \infty$ в силу состоятельности этой оценки. Таким образом, **среднее арифметическое является не только состоятельной и несмещенной, но и наиболее эффективной по критерию наименьших квадратов точечной оценкой среднего значения результата измерения.**

В качестве точечной оценки дисперсии по аналогии со средним арифметическим можно было бы принять

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i-\hat{Q}_n\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i-\hat{Q}_n+\bar{Q}-\bar{Q}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(Q_i-\bar{Q}\right)-\left(\hat{Q}_n-\bar{Q}\right)\right]^2=$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i-\bar{Q}\right)^2-\frac{2}{n}\left(\hat{Q}_n-\bar{Q}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i-\bar{Q}\right)+\frac{1}{n}\left(\hat{Q}_n-\bar{Q}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i-\bar{Q}\right)^2-2\left(\hat{Q}_n-\bar{Q}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Q_i-\bar{Q}\right)+\left(\hat{Q}_n-\bar{Q}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i-\bar{Q}\right)^2-\left(\hat{Q}_n-\bar{Q}\right)^2.$$

При любом законе распределения вероятности результата измерения эта оценка является состоятельной, так как при $n \to \infty$ второе слагаемое в правой части стремится к нулю, а первое — к σ_Q^2. Но

$$\mathbf{M}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i-\hat{Q}_n\right)^2\right]=\mathbf{M}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i-\bar{Q}\right)^2\right]-\mathbf{M}\left(\hat{Q}_n-\bar{Q}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}\left(Q_i-\bar{Q}\right)^2-\sigma_{\hat{Q}}^2=\sigma_Q^2-\frac{\sigma_Q^2}{n}=\frac{n-1}{n}\sigma_Q^2,$$

где учтена формула (31) на с. 140. Следовательно, такая оценка является смещенной. Несмещенную оценку можно получить, умножив ее на коэффициент $\frac{n}{n-1}$. При $n \to \infty$ этот коэффициент стремится к 1, так что несмещенная точечная оценка дисперсии результата измерения

$$S_Q^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i-\hat{Q}_n\right)^2$$

при любом законе распределения вероятности результата измерения остается состоятельной. Квадратный корень из нее

$$S_Q=\sqrt{\frac{1}{1-n}\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i-\hat{Q}_n\right)^2}$$

называется *стандартным отклонением результата измерения* или его *стандартной неопределенностью типа А*.

Измерительная процедура не заканчивается получением отсчета. Вслед за этим по формуле (10) на с. 51 нужно перейти к показанию[1], в которое еще следует внести

[1] Если шкала измерительного прибора проградуирована в значениях измеряемой величины, то переход к показанию происходит автоматически.

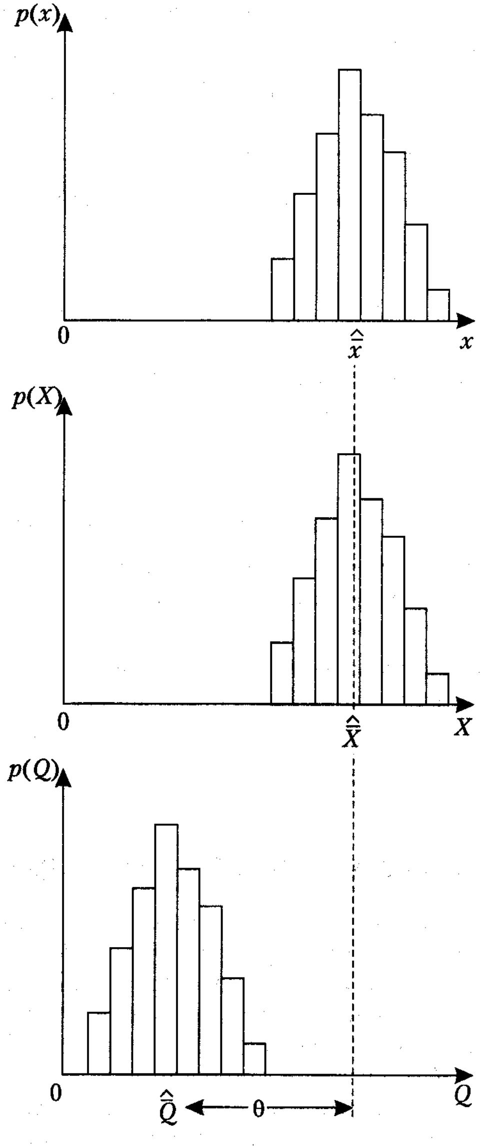


Рис. 30. Последовательность выполнения измерительной процедуры

поправку (или поправки). Только после этого будет получен результат измерения.

Сказанное иллюстрируется рис. 30. Показание X подчиняется тому же (предположим, нормальному) эмпирическому закону распределения вероятности, что и отсчет x. Внесение неслучайной поправки (в данном случае аддитивной) по формуле (12) приводит к смещению центра рассеяния в сторону, определяемую знаком поправки (на рис. 30 поправка $\theta < 0$). Результат измерения Q, который согласно третьей аксиоме метрологии является случайным, может быть представлен одним из следующих способов:

- **первоначально** — массивом экспериментальных данных, в которые внесены поправки;
- **в наглядной форме** — гистограммой;
- **аналитически** — выражениями для плотности вероятности, в данном случае

$$p(Q) = \frac{1}{S_Q\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(Q-\hat{Q})^2}{2S_Q^2}}\,dQ,$$

или функции распределения вероятности

$$F(Q) = \int_{-\infty}^{Q} p(Q)\,dQ,$$

которые хотя и остаются случайными из-за случайного характера $\hat{\bar{Q}}$ и S_Q^2 — оценок числовых характеристик (среднего значения и дисперсии соответственно), но служат хорошими аппроксимациями ступенчатых эмпирических зависимостей;

- **упрощенно** — посредством перечисления оценок числовых характеристик соответствующего (в данном случае нормального) закона распределения вероятности: $N(\hat{\bar{Q}};\ S_Q^2)$ или $N(\hat{\bar{Q}};\ S_Q)$ — общепринятое обозначение нормального закона с оценками его числовых характеристик.

4.4. Обратная задача теории измерений

Непосредственными откликами измерительного прибора на входное воздействие служат отклонение указателя отсчетного устройства на некоторый угол (рис. 31), изменение длины столба термометрической жидкости и тому подобные реакции средств измерений различных типов. Из-за влияния множества факторов, точный учет которых невозможен, а результат непредсказуем, отклик является случайным. Между тем, в конечном счете, представляет интерес не *случайный отклик* на входное воздействие, а *неслучайное значение* измеряемой величины. Определение значения измеряемой величины по отклику средства измерений на входное воздействие называется **обратной задачей теории измерений**.

Обратная задача решается в два этапа. На первом из них до начала измерений (*a priori*) устанавливается связь между откликом и входным воздействием. Для этого **отметкам шкалы на выходе средства измерений придаются значения измеряемой величины на входе**. Эта процедура представляет собой передачу средству измерений информации о размере единицы. Она называется *градуировкой* и позволяет в дальнейшем по отклику судить о значении измеряемой величины.

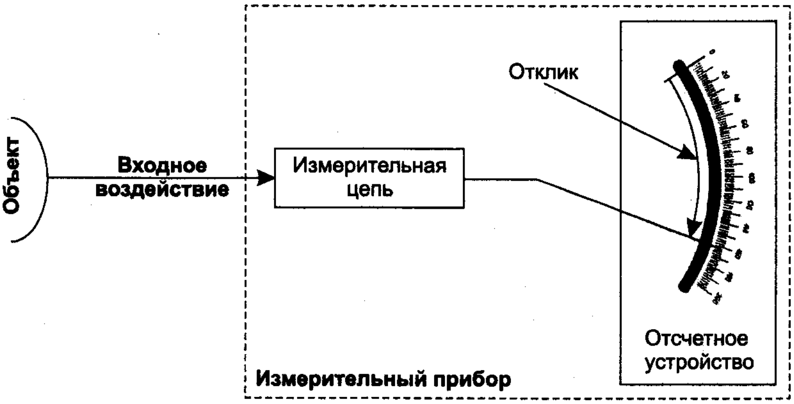


Рис. 31. Схема измерения

На втором этапе после выполнения измерительной процедуры (*a posteriori*) осуществляется **переход от случайного результата измерения, полученного на выходе измерительного прибора, к неслучайному значению измеряемой величины на входе**. Он состоит в *отождествлении* значения измеряемой величины с одной из характеристик положения результата измерения (обычно с его средним значением).

Градуировка

Градуировка выполняется в условиях, когда измеряемая величина либо не меняется, либо ее изменением можно пренебречь, а время позволяет снимать показания после того, как указатель отсчетного устройства окончательно остановится на какой-нибудь отметке шкалы.

Различают градуировку в отдельных точках диапазона измерений и построение непрерывной градуировочной характеристики.

Градуировка в отдельных точках диапазона измерений является наиболее простой. Например, при градуировке ртутного термометра в двух реперных точках (при температуре таяния льда и температуре кипения воды) получают по n значений длины ртутного столба в каждой точке. Затем **в центрах рассеяния** наносят отметки шкалы и присваивают этим отметкам значения 0°С и 100°С соответственно. Если длина ртутного столба прямо пропорциональна измеряемой температуре, то расстояние между полученными отметками шкалы можно разбить на 100 равных частей и получить термометрическую шкалу с ценой деления 1°С.

Построение градуировочной характеристики предполагает две возможности. Первая из них заключается в том, что зависимость между входным воздействием и откликом на него известна (например, линейная, квадратичная, логарифмическая и т. п.), но не известны коэффициенты, входящие в соответствующее алгебраическое уравнение. Тогда остается их определить. Вторая возможность состоит в необходимости аппроксимации экспериментальных данных аналитической зависимостью.

Если вид градуировочной характеристики

$$X = f(Q)$$

известен, то задача состоит в том, чтобы в ее представлении полиномом соответствующей степени

$$f(Q) = a_0 + a_1Q + a_2Q^2 + ... + a_mQ^m$$

найти такие значения коэффициентов a_0, a_1, a_2, ..., a_m, при которых эта зависимость наилучшим образом соответствовала бы экспериментальным данным.

На рис. 32 показаны некоторые варианты построения линейной градуировочной характеристики по экспериментальным данным, нанесенным кружочками. Вопрос о том, какой из вариантов лучше, должен решаться на основе какого-то критерия. Если значения входных воздействий Q_1, Q_2, ..., Q_n известны точно, а отклики на них X_1, X_2, ..., X_n подчиняются нормальному закону распределения вероятности, то обычно используется *критерий наименьших квадратов*. Минимизируется сумма квадратов отклонений откликов по оси ординат от градуировочной характеристики:

$$\sum_{i=1}^{n}[X_i - f(Q_i)]^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - a_0 - a_1Q_i - a_2Q_i^2 - ... - a_m Q_i^m\right)^2 = \min. \qquad (13)$$

Коэффициенты a_0, a_1, a_2, ..., a_m, определяющие оптимальную по критерию наименьших квадратов градуировочную характеристику, находятся из условия равенства нулю производных от этой суммы по каждому коэффициенту.

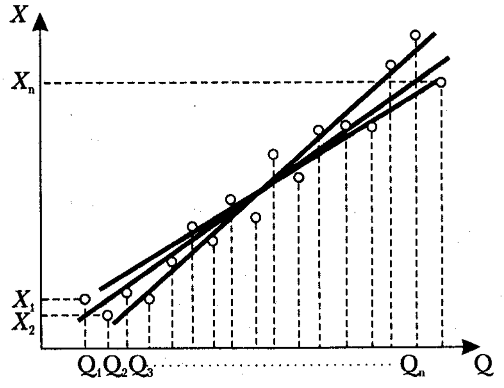


Рис. 32. Построение линейной градуировочной характеристики по экспериментальным данным

Пример 35

При градуировке измерительного прибора с линейной градуировочной характеристикой получены следующие числовые значения экспериментальных данных:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Q_i	41	50	81	104	120	139	154	180	208	241	250	269	301
X_i	4	8	10	14	15	20	19	23	26	30	31	36	37

Найти методом наименьших квадратов аналитическое выражение для градуировочной характеристики и построить ее графически.

Решение

1. Линейная градуировочная характеристика описывается выражением:

$$X = a_0 + a_1 Q,$$

где коэффициенты a_0 и a_1 методом наименьших квадратов находятся из условия:

$$\sum_{i=1}^{13} (X_i - a_0 - a_1 Q_i)^2 = \min.$$

2. Вышеприведенная функция минимальна в точке, где ее производные по a_0 и a_1 равны нулю. Поэтому коэффициенты a_0 и a_1 определяются в результате решения системы уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{13} (X_i - a_0 - a_1 Q_i) = 0; \\ \sum_{i=1}^{13} (X_i - a_0 - a_1 Q_i) Q_i = 0. \end{cases}$$

3. Два уравнения с двумя неизвестными имеют единственное решение. Разделив левую и правую части каждого уравнения на 13 и введя обозначения:

$$\frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13} X_i = \hat{X}; \quad \frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13} Q_i = \hat{Q};$$

$$\frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13} Q_i^2 = \widehat{\overline{Q^2}}; \quad \frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13} X_i Q_i = \widehat{\overline{XQ}},$$

получим выражения для коэффициентов a_0 и a_1 в форме, выходящей по своему значению за рамки частного примера:

$$a_0 = \frac{\widehat{\overline{Q^2}}\,\hat{X} - \hat{Q}\,\widehat{\overline{XQ}}}{\widehat{\overline{Q^2}} - \hat{Q}^2};$$

$$a_1 = \frac{\widehat{\overline{XQ}} - \hat{Q}\hat{X}}{\widehat{\overline{Q^2}} - \hat{Q}^2}.$$

4. В рассматриваемом случае $a_0 = 0{,}7$; $a_1 = 0{,}124$, так что аналитическое выражение для градуировочной характеристики имеет вид:

$$X = 0{,}7 + 0{,}124\, Q.$$

Графически она построена на рис. 33, где кружочками также нанесены экспериментальные данные.

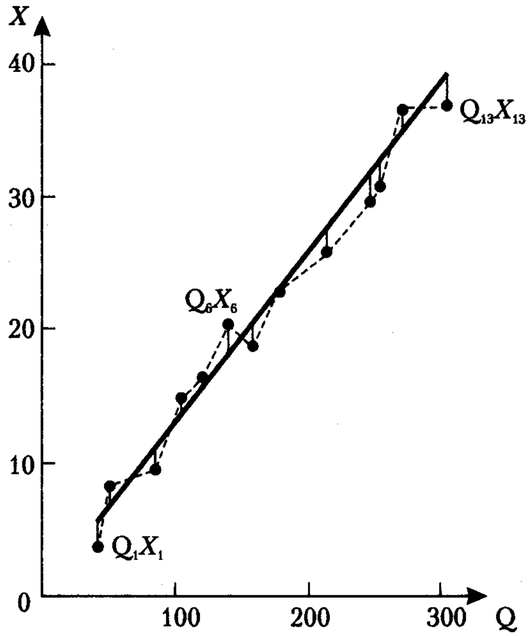


Рис. 33. Градуировочная характеристика в примере 35

Выражениями для a_0 и a_1, полученными в рассмотренном примере, можно пользоваться при градуировке измерительных приборов с нелинейной градуировочной характеристикой.

Так, например, если она описывается зависимостью

$$X = a_0 + \frac{a_1}{Q},$$

то в формулы для коэффициентов a_0 и a_1, полученные в примере 35, вместо Q следует подставлять $Y = \frac{1}{Q}$.

Точно так же, если

$$X = a_0 + a_1 Q^2,$$

то задача линеаризуется подстановкой $Y = Q^2$.

Иногда для линеаризации может использоваться логарифмирование. Если, например,

$$X = ae^{a_1 Q},$$

то после логарифмирования по основанию натуральных логарифмов получается:

$$Y = a_0 + a_1 Q,$$

где $Y = \ln X$; $a_0 = \ln a$. Можно привести и другие примеры.

Пример 36

Линеаризовать выражение для градуировочной характеристики

$$X = ae^{\frac{a_1}{Q}}.$$

Ответ: $Y = a_0 + a_1G$, где $Y = \ln X$; $a_0 = \ln a$; $G = Q^{-1}$.

Пример 37

Линеаризовать выражение для градуировочной характеристики

$$X = a_0 \ln\frac{Q}{a_1}.$$

Ответ: $X = A_0 + A_1G$, где $A_0 = -\,a_0 \ln a_1$; $A_1 = a_0$; $G = \ln Q$.

Если вид градуировочной характеристики неизвестен, то возникает задача отыскания наилучшей аппроксимации экспериментальных данных, полученных при градуировке, аналитической зависимостью (рис. 34). Решение ее методом наименьших квадратов отличается от решения предыдущей задачи только тем, что степень полинома

$$f(Q) = a_0 + a_1Q + a_2Q^2 + \dots$$

неизвестна. Она устанавливается на основании требований к точности градуировки. После этого минимизируется выражение (13). Количество уравнений для определения коэффициентов a_0, a_1, a_2, ... всегда равно числу неизвестных, так что задача имеет единственное решение. В специальной литературе она иногда называется *задачей сглаживания*.

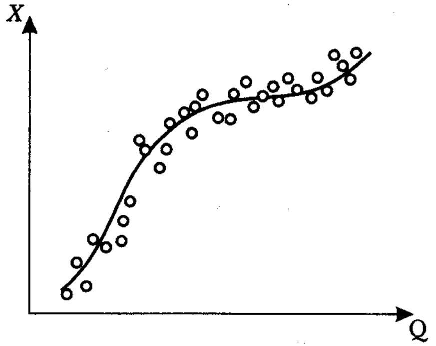


Рис. 34. Построение градуировочной характеристики, вид которой неизвестен

Переход от результата измерения к значению измеряемой величины

Так как результат измерения является случайным, естественно возникает вопрос, какое из его значений совпадает со значением измеряемой величины? Подсказкой служит то, что оно должно быть неслучайным и его размерность должна совпадать с размерностью измеряемой величины.

Сформулированным требованиям в равной мере удовлетворяют все **характеристики положения**: *среднее значение*, *мода* и *медиана*. Сделать более конкретный выбор из них на основе научной аргументации невозможно. По сложившейся практике со значением измеряемой величины Q отождествляется *среднее значение* результата измерения $\overline{Q}$. Такое положение не является чем-то особенным или из ряда вон выходящим. **В теории вероятностей**, например, существует *принцип практической уверенности*, согласно которому можно быть практически уверенным в том, что маловероятное событие при однократном испытании не произойдет. Этот принцип не доказывается математически; он подтверждается всем опытом человечества. Точно так же **в метрологии** можно быть практически уверенным в том, что среднее значение результата измерения $\overline{Q}$ в большинстве случаев соответствует значению измеряемой величины Q. Это подтверждается всем многовековым опытом практических измерений.

Сказанное позволяет перейти от любого из случайных значений результата измерения на выходе измерительного прибора к неслучайному значению измеряемой величины $Q \equiv \overline{Q}$ на его входе.

Если, например, **результат измерения подчиняется нормальному закону распределения вероятности**, то любое его случайное значение Q_i удалено от среднего значения $\overline{Q}$ не более чем

на $\pm 3\sigma_Q$ с вероятностью 0,997;
на $\pm 2{,}6\sigma_Q$ с вероятностью 0,99;
на $\pm 2\sigma_Q$ с вероятностью 0,95;
на $\pm\sigma_Q$ с вероятностью 0,68.

(см. табл. 9). Следовательно, можно утверждать и обратное: неслучайное значение $Q \equiv \overline{Q}$ удалено от любого случайного значения результата измерения Q_i не более чем

на $\pm 3\sigma_Q$ с вероятностью 0,997;
на $\pm 2{,}6\sigma_Q$ с вероятностью 0,99;
на $\pm 2\sigma_Q$ с вероятностью 0,95;
на $\pm\sigma_Q$ с вероятностью 0,68.

Таким образом, всегда можно указать *доверительный интервал*, в пределах которого находится значение измеряемой величины с соответствующей *доверительной вероятностью*.

Пример 38

Результат измерения расстояния подчиняется нормальному закону распределения вероятности с дисперсией 10^{-4} м^2 (*априорная информация*). Чему равно расстояние L, если при его измерении получено значение $L = 24{,}12$ м?

Решение. Полученный результат является случайным. На самом деле расстояние L равно

(24,09 ... 24,15) м с вероятностью P = 0,997;
(24,10 ... 24,14) м с вероятностью P = 0,95;
(24,11 ... 24,13) м с вероятностью P = 0,68.

Если неизвестно, какому закону распределения вероятности подчиняется результат измерения, то вероятность того, что любое его случайное значение Q_i окажется за пределами доверительного интервала $[\bar{Q} - t\sigma_Q; \bar{Q} + t\sigma_Q]$

$$P\{|Q_i - \bar{Q}| > t\sigma_Q\} = \int_{-\infty}^{\bar{Q}-t\sigma_Q} p(Q)dQ + \int_{\bar{Q}-t\sigma_Q}^{\infty} p(Q)dQ.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\xi(Q) = \begin{cases} 1, \text{ при } Q < \bar{Q} - t\sigma_Q; \\ 0, \text{ при } \bar{Q} - t\sigma_Q \le Q \le \bar{Q} + t\sigma_Q; \\ 1, \text{ при } Q > \bar{Q} + t\sigma_Q, \end{cases}$$

график которой показан на рис. 35. Это позволит перейти к более компактной записи:

$$P\{|Q_i - \bar{Q}| > t\sigma_Q\} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(Q)p(Q)dQ.$$

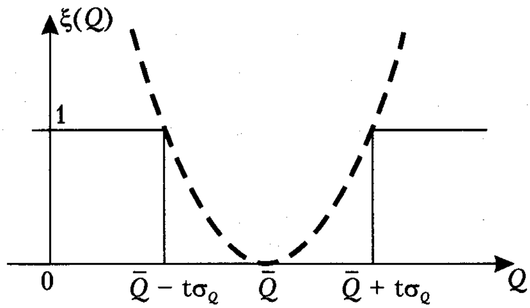


Рис. 35. К выводу неравенства П. Л. Чебышева

Результат интегрирования не уменьшится, если функцию $\xi(Q)$ заменить показанной на рис. 35 пунктиром квадратичной функцией $\left(\frac{Q-\bar{Q}}{t\sigma_Q}\right)^2$, которая при всех Q не меньше $\xi(Q)$. Тогда

$$P\{|Q_i - \bar{Q}| > t\sigma_Q\} \le \frac{1}{(t\sigma_Q)^2} \int_{-\infty}^{\infty} (Q - \bar{Q})^2 p(Q)dQ = \frac{1}{t^2},$$

а вероятность того, что отдельное значение результата измерения Q_i при любом законе распределения вероятности не отличается от среднего значения $\bar{Q}$ больше чем на половину доверительного интервала $[\bar{Q} - t\sigma_Q; \bar{Q} + t\sigma_Q]$,

$$P\left\{\bar{Q} - t\sigma_Q \le Q_i \le \bar{Q} + t\sigma_Q\right\} \ge 1 - \frac{1}{t^2}.$$

Эта формула называется *неравенством П. Л. Чебышева.* Она устанавливает **нижнюю границу** вероятности того, что случайное значение результата измерения Q_i не окажется за пределами доверительного интервала. При всех обстоятельствах оно удалено от среднего значения $\overline{Q}$ не более чем

на $\pm 3\sigma_Q$ с вероятностью 0,889;
на $\pm 2{,}6\sigma_Q$ с вероятностью 0,85;
на $\pm 2\sigma_Q$ с вероятностью 0,75;
на $\pm \sigma_Q$ с вероятностью 0.

Следовательно, можно утверждать и обратное: неслучайное значение измеряемой величины $Q \equiv \overline{Q}$ удалено от любого случайного значения результата измерения Q_i при любом законе распределения его вероятности не более чем

на $\pm 3\sigma_Q$ с вероятностью 0,889;
на $\pm 2{,}6\sigma_Q$ с вероятностью 0,85;
на $\pm 2\sigma_Q$ с вероятностью 0,75;
на $\pm \sigma_Q$ с вероятностью 0.

При неизвестном законе распределения вероятности результата измерения значение измеряемой величины на основании неравенства П. Л. Чебышева устанавливается с максимальной неопределенностью.

Уменьшить эту неопределенность можно, только выяснив, какому закону распределения вероятности подчиняется результат измерения.

4.5. Математические действия с результатами измерений

4.5.1. Математические действия с одним результатом измерения

При математических действиях над результатами измерений нужно учитывать, что последние являются случайными значениями измеренных величин. **Обращение с результатами измерений как с неслучайными значениями приводит к ошибкам.** Некоторые из них будут рассмотрены на конкретных примерах.

Начнем с умножения результата измерения на постоянный множитель.

Пример 39

Удвоить результат измерения r, эмпирическое распределение вероятностей числовых значений которого представлено табл. 10.

Таблица 10

r	m	P
3	20	0,2
4	50	0,5
5	30	0,3

Решение. Результатом умножения случайного числа r на 2 будет новое случайное число $2r$, распределение вероятностей числовых значений которого:

$2r$	P
6	0,2
8	0,5
10	0,3

Графически оно показано на рис. 36. Вероятности удвоенных по сравнению с r значений остаются прежними.

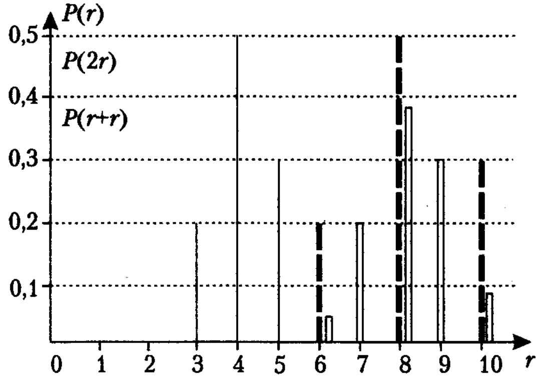


Рис. 36. Распределение вероятностей $P(r)$, $P(2r)$ и $P(r + r)$ в примерах 39 и 43

Оценки числовых характеристик теоретической модели эмпирического распределения вероятностей, представленного табл. 10,

$$\hat{r} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i = \frac{3\cdot 20 + 4\cdot 50 + 5\cdot 30}{100} = 4{,}1;$$

$$S_r^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i^2 - \hat{r}^2 = \frac{9\cdot 20 + 16\cdot 50 + 25\cdot 30}{100} 16{,}8 = 0{,}5.$$

Оценки числовых характеристик теоретической модели нового случайного числа

$$\widehat{2r} = 8; \quad S_{2r}^2 = 2,$$

следовательно,

$$\widehat{2r} = 2\hat{r}; \quad S_{2r}^2 = 4S_r^2.$$

Таким образом, для оценок справедливы свойства самих числовых характеристик (см. п. 4.3.2): **среднее арифметическое произведения постоянного множителя а и результата измерения A равно произведению постоянного множителя и среднего арифметического значения результата измерения**, то есть если

$$Q = aA,$$

то

$$\hat{\bar{Q}} = a\hat{\bar{A}}.$$

В равной мере стандартное отклонение произведения постоянного множителя а и результата измерения A равно произведению модуля постоянного множителя и стандартного отклонения результата измерения:

$$S_Q = |a| S_A.$$

Теперь рассмотрим операцию возведения результата измерения в квадрат. Под квадратом результата измерения A понимается случайная величина

$$Q = A^2,$$

которая с вероятностями P_i, соответствующими значениям A_i, принимает значения, равные Q_i.

Пример 40

Возвести в квадрат результат измерения, рассмотренный в предыдущем примере.

Решение. Распределение вероятностей числовых значений r^2 выглядит следующим образом:

r^2	P
9	0,2
16	0,5
25	0,3

Оценки числовых характеристик теоретической модели этого распределения вероятностей

$$\hat{\overline{r^2}} = 17{,}3; \quad S_{r^2} = 5{,}7.$$

Рассмотренные примеры показывают, что при функциональном преобразовании результата измерения

$$Q = f(A) \tag{14}$$

происходит трансформация его эмпирического закона распределения вероятностей в соответствии с правилом

$$P(Q_i) = P(A_i).$$

Если результат измерения A задан теоретической моделью эмпирического закона распределения вероятностей, то используется то, что интегральная функция распределения вероятности $F(Q)$ представляет собой вероятность того, что

$$f(A) < Q.$$

Решение этого неравенства относительно A устанавливает пределы, в которых находится A с вероятностью $F(Q)$. Последняя равна интегралу от плотности вероятности $p_A(A)$ в установленных пределах.

Пример 41

Определить трансформацию плотности вероятности $p_A(A)$ результата измерения A после линейного преобразования $Q = a\,A + b$.

Решение

1. $F(Q) = P\{a\,A + b < Q\}$.
2. С вероятностью $F(Q)$ результат измерения

$$A < \frac{Q-b}{a} \text{ при } a > 0;$$

$$A > \frac{Q-b}{a} \text{ при } a < 0. \text{ Отсюда}$$

$$F(Q) = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\frac{Q-b}{a}} p_A(A)\mathrm{d}A \text{ при } a > 0; \right.$$

$$F(Q) = \left\{ \int\limits_{\frac{Q-b}{a}}^{-\infty} p_A(A)\mathrm{d}A \text{ при } a < 0. \right.$$

3. После перестановки пределов в последнем интеграле и дифференцирования получаем:

$$p(Q) = \frac{1}{|a|} p_A\left(\frac{Q-b}{a}\right).$$

Результат, полученный в примере 41, применительно к любой **монотонной** функции (14) обобщается следующим образом:

$$p(Q) = \left|\frac{\mathrm{d}f^{-1}(Q)}{\mathrm{d}Q}\right| p_A[f^{-1}(Q)],$$

где f^{-1} — функция, обратная функции f. В примере 41 $f^{-1} = \frac{Q-b}{a}$. Если f^{-1} — **многозначная** функция, то это отражается на пределах, в которых находится A с вероятностью $F(Q)$.

Пример 42

Определить трансформацию нормированного нормального закона распределения вероятности, которому подчиняется результат измерения A, после нелинейного преобразования $Q = A^2$.

Решение

1. $F(Q) = P\{A^2 < Q\}$.
2. Пределы, в которых выполняется неравенство, устанавливаются функцией $A = \pm\sqrt{Q}$, обратной возведению A в квадрат (рис. 37). Поэтому

$$F(Q) = \int_{-\sqrt{Q}}^{\sqrt{Q}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{A^2}{2}} dA = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\sqrt{Q}} e^{-\frac{A^2}{2}} dA - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{-\sqrt{Q}} e^{-\frac{A^2}{2}} dA.$$

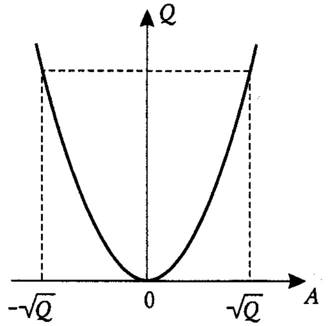


Рис. 37. Графическое решение уравнения, обратного возведению A в квадрат

3. После дифференцирования получаем:

$$p(Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Q}} e^{-\frac{Q}{2}}.$$

Для сравнения графики плотности исходного и преобразованного распределения вероятности показаны на рис. 38.

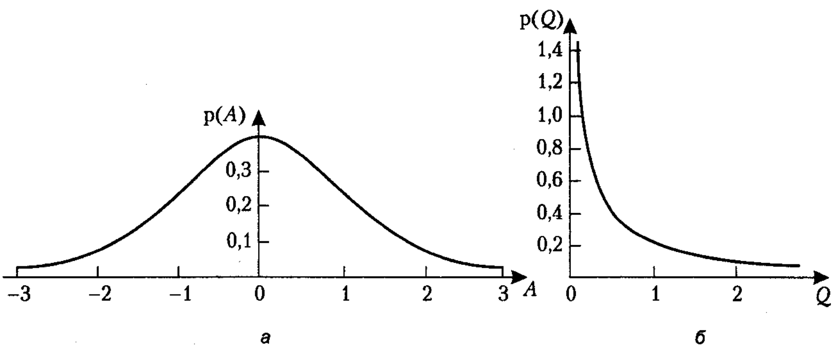


Рис. 38. Графики плотности вероятности результата измерения, подчиняющегося нормированному нормальному закону, до (*а*) и после (*б*) возведения его в квадрат

На практике преобразованиями законов распределения вероятности результатов измерений интересуются сравнительно редко. Обычно ограничиваются расчетами на уровне оценок числовых характеристик законов распределения.

4.5.2. Математические действия с несколькими результатами измерений

Начнем со сложения результатов измерений.

Пример 43

Распределение вероятностей числовых значений результата измерения одной из сторон прямоугольника представлено табл. 10. Независимое измерение прилежащей стороны дало в точности такой же результат, то есть прямоугольник является квадратом. Определить его полупериметр.

Решение. Полупериметр квадрата является величиной, значение которой равно сумме двух других значений r_1 и r_2, каждое из которых задано распределением вероятностей, представленным табл. 10. По условию $r_1 = r_2 = r$. При $r_1 = 3$ второе слагаемое r_2 может иметь любое из трех числовых значений, приведенных в табл. 10. Вероятность того, что $r_1 + r_2 = 3 + 3 = 6$, равна $0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$; вероятность того, что $r_1 + r_2 = 3 + 4 = 7$, составляет $0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}10$; вероятность того, что $r_1 + r_2 = 3 + 5 = 8$, определяется таким же образом: $0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$. Аналогичные варианты возникают при $r_1 = 4$ и $r_1 = 5$. Все они сведены в табл. 11.

Таблица 11

r_1	r_2	$r_1 + r_2$	$P = P_1 \cdot P_2$
3	3	6	$0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$
3	4	7	$0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}10$
3	5	8	$0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$
4	3	7	$0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}10$
4	4	8	$0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$
4	5	9	$0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}15$
5	3	8	$0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$
5	4	9	$0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15$
5	5	10	$0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$

Из табл. 11 видно, что

$$P\{r_1 + r_2 = 6\} = 0{,}04;$$
$$P\{r_1 + r_2 = 7\} = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2;$$
$$P\{r_1 + r_2 = 8\} = 0{,}06 + 0{,}25 + 0{,}06 = 0{,}37;$$
$$P\{r_1 + r_2 = 9\} = 0{,}15 + 0{,}15 = 0{,}30;$$
$$P\{r_1 + r_2 = 10\} = 0{,}09.$$

Таким образом, числовые значения полупериметра как суммы числовых значений длин двух прилежащих сторон, полученных путем независимого измерения последних, подчиняется следующему распределению вероятностей:

$r_1 + r_2$	P
6	0,04
7	0,20
8	0,37
9	0,30
10	0,09

На рис. 36 распределения вероятностей числовых значений длин полупериметра и сторон квадрата представлены графически. Далее

$$\overline{\hat{r_1 + r_2}} = \frac{6 \cdot 4 + 7 \cdot 20 + 8 \cdot 37 + 9 \cdot 30 + 10 \cdot 9}{100} = 8{,}2;$$

$$S^2_{r_1 + r_2} = \frac{36 \cdot 4 + 49 \cdot 20 + 64 \cdot 37 + 81 \cdot 30 + 100 \cdot 9}{100} \cdot 67{,}24 = 1.$$

Таким образом, для оценок, как и для самих числовых характеристик, **среднее арифметическое суммы независимых результатов измерений**

$$Q = A + B \ldots$$

равно сумме их средних арифметических:

$$\hat{\hat{Q}} = \hat{\hat{A}} + \hat{\hat{B}} + \ldots,$$

а квадрат стандартного отклонения — сумме квадратов стандартных отклонений:

$$S_Q^2 = S_A^2 + S_B^2 + \ldots$$

Пример 44

В табл. 12 приведено 100 независимых значений результата измерения массы консервированного продукта вместе со стеклянной банкой и крышкой $m_б$ (брутто), в табл. 13 — только банки и крышки (тары).

Определить массу консервированного продукта $m_н$ (нетто).

Таблица 12

$m_б$, кг	m	$P_б$
3,98	30	0,3
4,00	50	0,5
4,03	10	0,1
4,04	10	0,1

Таблица 13

$m_т$, кг	m	$P_т$
0,88	20	0,2
0,90	70	0,7
0,93	10	0,1

Решение. Масса консервированного продукта $m_н$, получаемая расчетным путем, равна разности двух результатов измерений:

$$m_н = m_б - m_т,$$

эмпирические распределения вероятностей которых заданы таблично. По тому же принципу составим табл. 14.

Таблица 14

$m_б$, кг	$m_т$, кг	$m_н$, кг	$P_н = P_б \cdot P_т$	$m_б$, кг	$m_т$, кг	$m_н$, кг	$P_н = P_б \cdot P_т$
3,98	0,88	3,10	0,3 · 0,2 = 0,06	4,03	0,88	3,15	0,1 · 0,2 = 0,02
3,98	0,90	3,08	0,3 · 0,7 = 0,21	4,03	0,90	3,13	0,1 · 0,7 = 0,07
3,98	0,93	3,05	0,3 · 0,1 = 0,03	4,03	0,93	3,10	0,1 · 0,1 = 0,01
4,00	0,88	3,12	0,5 · 0,2 = 0,10	4,04	0,88	3,16	0,1 · 0,2 = 0,02
4,00	0,90	3,10	0,5 · 0,7 = 0,35	4,04	0,90	3,14	0,1 · 0,7 = 0,07
4,00	0,93	3,07	0,5 · 0,1 = 0,05	4,04	0,93	3,11	0,1 · 0,1 = 0,01

По данным табл. 14 распределение вероятностей массы консервированного продукта можно представить следующим образом:

$m_н$, кг	$P_н$	$m_н$, кг	$P_н$
3,05	0,03	3,12	0,10
3,07	0,05	3,13	0,07
3,08	0,21	3,14	0,07
3,10	0,42	3,15	0,02
3,11	0,01	3,16	0,02

Оценки числовых характеристик теоретической модели, соответствующей этому эмпирическому распределению вероятностей:

$$\hat{\bar{m}}_н = 3{,}1\,кг;\quad S^2_{m_н} = 5{,}4 \cdot 10^{-4}\,кг^2.$$

Так как эмпирическим распределениям вероятности, представленным табл. 12 и 13, соответствуют

$$\hat{\bar{m}}_б = 4{,}0\,кг;\quad S^2_{m_б} = 3{,}7 \cdot 10^{-4}\,кг^2.$$

$$\hat{\bar{m}}_т = 0{,}9\,кг;\quad S^2_{m_т} = 1{,}7 \cdot 10^{-4}\,кг^2.$$

то действительно **среднее арифметическое разности независимых результатов измерений**

$$Q = A - B$$

равно разности их средних арифметических:

$$\hat{\bar{Q}} = \hat{\bar{A}} - \hat{\bar{B}},$$

а квадрат стандартного отклонения — сумме квадратов стандартных отклонений:

$$S_Q^2 = S_A^2 + S_B^2.$$

Из сравнения распределений вероятностей $P(2r)$ и $P(r + r)$ на рис. 36 и оценок дисперсий S^2_{2r}, S^2_{r+r} в примерах 39 и 43 видно, что

$$\boxed{r + r \neq 2r,}$$

или в общем случае

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} Q_i \neq nQ, \text{ где } Q_i = Q.}$$

Закон распределения вероятности суммы независимых результатов измерений называется *композицией* законов распределения вероятности слагаемых. Для определения композиции различных законов распределения вероятности результатов измерений широко используется метод характеристических функций.

Характеристической функцией случайной величины Q называется математическое ожидание случайной величины $e^{j\omega Q}$, где ω — неслучайный параметр. Если Q — сумма независимых результатов измерений A, B, ..., то

$$\mathbf{M}(e^{j\omega Q}) = \mathbf{M}(e^{j\omega A} \cdot e^{j\omega B} \ldots),$$

где сомножители так же независимы, как и результаты измерений. Поэтому

$$\mathbf{M}(e^{j\omega Q}) = \mathbf{M}\,(e^{j\omega A}) \cdot \mathbf{M}(e^{j\omega B}) \cdot \ldots.$$

Если характеристическую функцию определить как спектр плотности вероятности результата измерения:

$$\mathbf{M}(e^{-j\omega Q}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega Q} p_Q(Q) dQ = \dot{p}_Q(\omega),$$

то

$$\dot{p}_Q(\omega) = \dot{p}_A(\omega)\dot{p}_B(\omega) \ldots,$$

то есть **спектр плотности вероятности суммы независимых результатов измерений равен произведению спектров плотности вероятности слагаемых**.

Плотность вероятности композиции нескольких законов распределения вероятностей независимых результатов измерений находится обратным преобразованием Фурье:

$$p_Q(Q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}_Q(\omega) e^{j\omega Q} d\omega.$$

Пользуясь методом характеристических функций, можно показать, что композицией одинаковых равномерных законов распределения вероятности, которым подчиняются два независимых результата измерений, является *треугольный закон* (рис. 39), называемый *законом распределения вероятности Симпсона*. Композицией двух равномерных законов распределения вероятности независимых результатов измерений с неодинаковым размахом является *трапецеидальный закон*. Это обстоятельство часто используется при учете дефицита информации (см. с. 125–126).

Рассматривая произведение большого числа характеристических функций, можно убедиться в том, что, независимо от вида сомножителей, оно стремится к характеристической функции, соответствующей нормальному закону распределения вероятности. Это фундаментальное положение носит название **центральной предельной теоремы**. На рис. 39 видно, как быстро нормализуется композиция одинаковых равномерных законов распределения вероятности. При числе слагаемых, больше 4-х, уже можно считать, что она практически подчиняется нормальному закону.

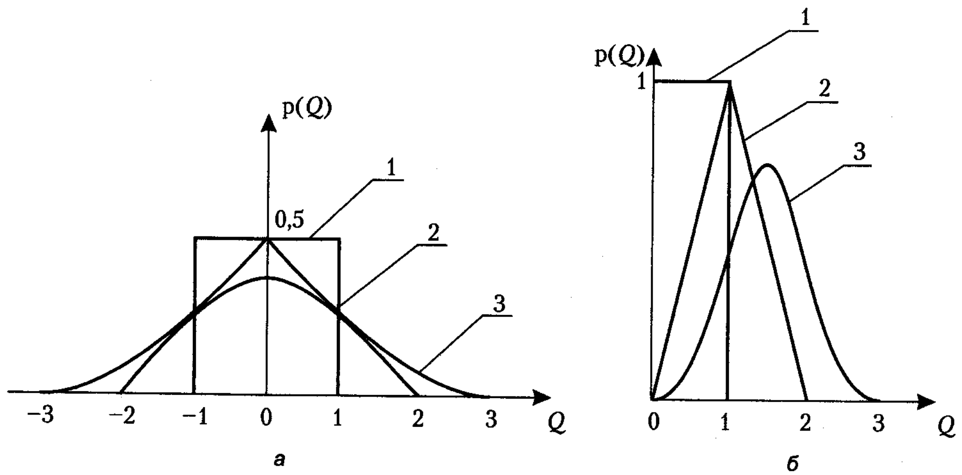


Рис. 39. Равномерная плотность вероятности результата измерения (1) и плотность вероятности композиции двух (2) и трех (3) таких законов распределения вероятности (a — при $\overline{Q} = 0$; $б$ — при $\overline{Q} = 0{,}5$)

На практике с распределениями вероятности результатов измерений оперируют только при очень точных вычислениях. Обычно ограничиваются расчетами на уровне оценок числовых характеристик.

Пример 45

При однократном взвешивании продукта в таре, рассмотренной в примере 44, на противоположную чашу настольных циферблатных весов поставлены две гири по (2 ± 0,01) кг. Стрелочный указатель весов остановился на отметке шкалы 300 г. Определить массу продукта $m_н$, если известно, что показание весов подчиняется нормальному закону распределения вероятности со средним квадратическим отклонением 5 г.

Решение

1. По стрелочному указателю (без учета массы гирь и тары) масса продукта с вероятностью 0,95 находится в пределах (300 ± 10) г. Представим эту ситуацию равномерным законом распределения вероятности на интервале от

290 г до 310 г со средним значением и аналогом дисперсии, равными, соответственно,

$$\overline{m} = 300\,г;$$
$$u_m^2 = \frac{10^2}{3} = 33{,}3\,г^2.$$

2. Чему равна масса каждой гири в интервале от 1,99 кг до 2,01 кг, неизвестно. Представим и эту ситуацию математической моделью в виде равномерного закона распределения вероятности на интервале от 1,99 кг до 2,01 кг со средним значением и аналогом дисперсии

$$\overline{m}_г = 2 \cdot 10^3\,г;$$
$$u_{m_г}^2 = 33{,}3\,г^2.$$

3. С учетом массы гирь и тары масса продукта будет представлена математической моделью в виде закона распределения вероятности со средним значением и аналогом дисперсии

$$\overline{m}_н = \overline{m} + \overline{m}_г + \overline{m}_г - \hat{\overline{m}}_т = 3{,}4\,кг;$$
$$u_{m_н}^2 = u_m^2 + u_{m_г}^2 + u_{m_г}^2 + S_{m_т}^2 = 270\,г^2.$$

Подобные вычисления широко используются при внесении аддитивных поправок, точные значения которых неизвестны.

Умножение двух результатов измерений один на другой рассмотрим на примере, когда они равны между собой.

Пример 46

Определить площадь квадрата по данным, приведенным в примере 43.

Решение. Площадь квадрата s равна произведению его сторон:

$$s = r_1 \cdot r_2,$$

распределение вероятности числовых значений каждой из которых представлено табл. 10. По тому же принципу, по которому составлены табл. 11 и 14, составим табл. 15.

Таблица 15

r_1	r_2	s	$P = P_1 \cdot P_2$
3	3	9	0,2 · 0,2 = 0,04
3	4	12	0,2 · 0,5 = 0,10
3	5	15	0,2 · 0,3 = 0,06
4	3	12	0,5 · 0,2 = 0,10
4	4	16	0,5 · 0,5 = 0,25
4	5	20	0,5 · 0,3 = 0,15
5	3	15	0,3 · 0,2 = 0,06
5	4	20	0,3 · 0,5 = 0,15
5	5	25	0,3 · 0,3 = 0,09

Используя данные табл. 15, распределение вероятностей числовых значений площади квадрата можно представить следующим образом:

s	P
9	0,04
12	0,20
15	0,12
16	0,25
20	0,30
25	0,09

Оценка среднего значения теоретической модели этого эмпирического распределения $\hat{\bar{s}} = 16{,}8$, а стандартное отклонение $S_S = 4{,}1$.

Сравнивая этот результат с результатом, полученным в примере 40, убеждаемся, что

$$\boxed{r \cdot r \neq r^2,}$$

или в общем случае

$$\boxed{\prod_1^n Q_i \neq Q^n, \text{ где } Q_i = Q.}$$

Игнорирование этого обстоятельства приводит к еще более серьезным ошибкам, чем при замене аддитивного алгоритма мультипликативным, или наоборот.

Сопоставляя результат, полученный в последнем примере, с исходными данными в примере 39, видим, что оценки математических ожиданий обладают таким же свойством, как и сами математические ожидания: **среднее арифметическое произведения нескольких независимых результатов измерений равно произведению их средних арифметических**

$$\hat{\bar{Q}} = \hat{\bar{A}} \cdot \hat{\bar{B}} \cdot \ldots .$$

Характеристика рассеяния произведения связана с характеристиками рассеяния сомножителей более сложной зависимостью, которая будет рассмотрена позже.

На основании приведенных выше примеров 43, 44 и 46 можно заключить, что если

$$Q = f(A, B, \ldots),$$

где независимые результаты измерений A, B, ... заданы эмпирическими законами распределения вероятности, полученными с помощью цифровых измерительных приборов, то распределение вероятностей

$$P(Q_k) = \sum_{Q_k = f(A_i, B_j ...)} P(A_i) P(B_j)...,$$

где суммируются только те произведения $P(A_i)\ P(B_j)$ ..., для которых $f(A_i, B_j, ...) = Q_k$.

Если результаты измерений A, B, ... заданы теоретическими моделями эмпирических законов распределения вероятности, то следует опять-таки воспользоваться тем, что интегральная функция распределения вероятности $F(Q)$ представляет собой вероятность того, что

$$f(A, B, ...) < Q.$$

Это неравенство в многомерном пространстве выполняется для всех точек с координатами A, B, ..., геометрическим местом которых является область G, ограниченная гиперповерхностью

$$f(A, B, ...) = Q.$$

Поэтому через плотность вероятности совместного распределения результатов измерений $p(A, B, ...)$ интересующая нас вероятность выражается следующим образом:

$$F(Q) = \int ...{}_G... \int p(A, B, ...) dA dB ... .$$

Если результаты измерений A, B, ... независимы, то

$$F(Q) = \int ...{}_G... \int p_A(A)\, p_B(B) ... dA dB ... . \quad (15)$$

Пример 47

Найти плотность вероятности суммы двух независимых результатов измерения A и B, первый из которых подчиняется нормированному нормальному закону, а второй — равномерному закону распределения вероятности на интервале $[-1, 1]$.

Решение

1. Интегральная функция распределения вероятности $F(Q)$ композиции двух рассматриваемых в примере законов представляет собой вероятность того, что

$$A + B < Q.$$

Это неравенство выполняется для всех точек с координатами (A, B), геометрическим местом которых является область G, представляющая собой полуплоскость, лежащую ниже прямой $A + B = Q$ (рис. 40).

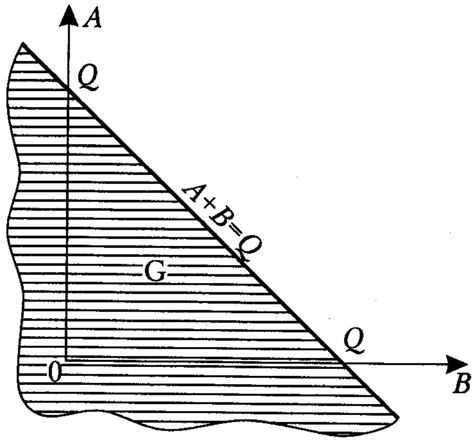


Рис. 40. Графическое решение неравенства $A + B < Q$ в примере 47

2. Выполняя в (15) интегрирование сначала по B (при постоянном A), а затем по A (или в обратном порядке), получим:

$$F(Q)=\int_{-\infty}^{\infty} p_A(A)dA\int_{-\infty}^{Q-A} p_B(B)dB=\int_{-\infty}^{\infty} p_B(B)dB\int_{-\infty}^{Q-B} p_A(A)dA.$$

Отсюда плотность вероятности суммы двух независимых результатов измерений

$$p_Q(Q)=\frac{dF(Q)}{dQ}=\int_{-\infty}^{\infty} p_A(A)p_B(Q-A)dA=\int_{-\infty}^{\infty} p_B(B)p_A(Q-B)dB.$$

3. Так как в рассматриваемом примере $p_B(B) \neq 0$ лишь в промежутке $[-1;\ 1]$, то

$$p_Q(Q)=\int_{-\infty}^{\infty} p_B(B)p_A(Q-B)dB=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(Q-B)^2}{2}}dB.$$

Подстановкой $B = Q + \nu$; $dB = d\nu$ последний интеграл приводится к виду:

$$p_Q(Q)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-(1+Q)}^{1-Q} e^{-\frac{1}{2}\nu^2}d\nu=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{1-Q} e^{-\frac{1}{2}\nu^2}d\nu-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{-(1+Q)} e^{-\frac{1}{2}\nu^2}d\nu\right)$$

Отсюда

$$p_Q(Q)=\frac{1}{2}[L(1-Q)-L(-1-Q)]=\frac{1}{2}[L(1-Q)+L(1+Q)],$$

где L — функция Лапласа. График плотности вероятности композиции нормированного нормального и равномерного на интервале $[-1,\ 1]$ законов распределения вероятности независимых результатов измерений показан на рис. 41.

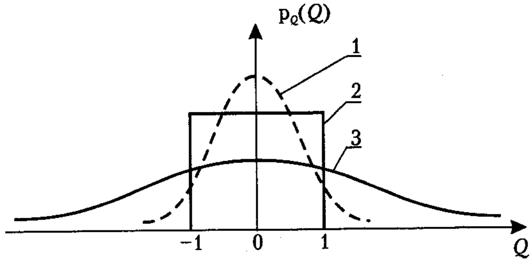


Рис. 41. График (3) плотности вероятности композиции нормированного нормального (1) и равномерного (2) законов распределения

Любые математические операции над результатами измерений связаны с преобразованиями их законов распределения вероятности. При сложных функциях большого числа результатов измерений это сопряжено с преодолением значительных технических трудностей. Поэтому в таких случаях **часто ограничиваются приближенными вычислениями на уровне оценок числовых характеристик.**

4.5.3. Приближенные вычисления

Пусть, например,

$$Q = f(A, B),$$

где A и B — по-прежнему некоторые результаты измерений. Вводя в рассмотрение показания и поправки, можем написать:

$$A = X + \theta_X;\ B = Y + \theta_Y;\ Q = Z + \theta_Z,$$

где поправки будем для простоты считать известными точно постоянными величинами, а

$$X = \bar{X} + \delta_X;\ Y = \bar{Y} + \delta_Y;\ Z = \bar{Z} + \delta_Z.$$

Тогда

$$Z + \theta_Z + \delta_Z = f\left(\bar{X} + \theta_Y + \delta_Y; \bar{Y} + \theta_Y + \delta_Y\right)$$

Идея приближенных вычислений состоит в том, что сложную функцию представляют рядом, в котором ограничиваются первыми членами разложения. В данном случае, считая поправки и случайные отклонения от средних значений малыми по сравнению с X и Y, разложим функцию f в ряд Тейлора:

$$\bar{Z} + \theta_Z + \delta_Z = f(\bar{X},\bar{Y}) + \frac{\partial f}{\partial X}(\theta_X + \delta_X) + \frac{\partial f}{\partial X}(\theta_Y + \delta_Y) +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(\theta_X + \delta_X)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}(\theta_Y + \delta_Y)^2 + \ldots \qquad (16)$$

Первые слагаемые в правой и левой частях этого выражения не зависят от поправок и случайных отклонений от средних значений. Поэтому

$$\bar{Z} = f(\bar{X},\bar{Y}). \qquad (17)$$

Вместо средних значений X и Y могут быть использованы их оценки. Это позволит получить оценку $\overline{Z}$, дисперсия которой будет минимальной, если из всех возможных оценок $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ будут выбраны имеющие наименьшую дисперсию. Таковыми являются средние арифметические показаний средств измерений. Поэтому **эффективная оценка $\overline{Z}$ получается в результате подстановки в формулу (17) средних арифметических:**

$$\hat{\overline{Z}} = f(\hat{\overline{X}}, \hat{\overline{Y}}), \tag{18}$$

Для определения поправки θ_z вычтем уравнение (17) из уравнения (16):

$$\begin{aligned} \theta_Z + \delta_Z &= \frac{\partial f}{\partial X}(\theta_X + \delta_X) + \frac{\partial f}{\partial Y}(\theta_Y + \delta_Y) + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(\theta_X + \delta_X)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}(\theta_Y + \delta_Y)^2 \ldots, \end{aligned} \tag{19}$$

и усредним левую и правую части получившегося выражения:

$$\begin{aligned} \theta_Z &= \frac{\partial f}{\partial X}\theta_X + \frac{\partial f}{\partial Y}\theta_Y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\overline{(\theta_X + \delta_X)^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}\overline{(\theta_X + \delta_X)^2} + \ldots = \\ &= \frac{\partial f}{\partial X}\theta_X + \frac{\partial f}{\partial Y}\theta_Y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\theta_X^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}\theta_Y^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\sigma_X^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}\sigma_Y^2 + \ldots \end{aligned} \tag{20}$$

Отсюда видно, что даже если $\theta_X = \theta_Y = 0$, то все равно **может возникнуть необходимость во внесении поправки**

$$\theta_Z \approx \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\sigma_X^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}\sigma_Y^2,$$

если только ею нельзя пренебречь. **Возникновение этой поправки на неточность вычислений, объясняемое наличием квадратичных членов разложения, является важной особенностью приближенных вычислений** на уровне оценок числовых характеристик.

Вычтем теперь уравнение (20) из уравнения (19), ограничившись линейными членами разложения. Получим:

$$\delta_Z = \frac{\partial f}{\partial X}\delta_X + \frac{\partial f}{\partial Y}\delta_Y.$$

Усреднение квадрата левой и правой частей этого выражения позволяет найти приближенное значение дисперсии результата функционального преобразования:

$$\begin{aligned} \sigma_Z^2 = \overline{\delta_Z^2} &= \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^2\delta_X^2 + 2\frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial f}{\partial Y}\delta_X\delta_Y + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^2\delta_Y^2} = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^2\sigma_X^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^2\sigma_Y^2 + 2\frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial f}{\partial Y}R, \end{aligned} \tag{21}$$

где σ_X и σ_Y — средние квадратические отклонения результатов измерений A и B; R — *смешанный центральный момент второго порядка* совместного распределения случайных значений A и B.

Общее правило образования центральных моментов совместного распределения двух случайных чисел x и y:

$$\overline{(x-\bar{x})^{r}(y-\bar{y})^{k}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{x})^{r}(y-\bar{y})^{k}p(x,y)\,dx\,dy,$$

где r + k — суммарный порядок или номер момента. Смешанный момент второго порядка

$$R = \overline{(x-\bar{x})(y-\bar{y})} = \overline{\delta_x\delta_y}$$

называется *корреляционным* и служит мерой линейной статистической связи между двумя случайными числами, которая в отличие от функциональной указывает на то, что по каким-то причинам случайные числа обнаруживают тенденцию к синхронному изменению, причем не обязательно в одном направлении. Например, увеличение случайных значений x сопровождается и некоторым увеличением (рис. 42, *а*, или, наоборот, уменьшением — рис. 42, *б*) случайных значений y. Обычно это бывает следствием влияния какого-то общего фактора, например изменения температуры в помещении, где проводятся измерения, или падения напряжения в сети питания и т. п. В первом случае корреляционный момент больше нуля, и говорят о положительной корреляции между случайными числами, во втором — об отрицательной корреляции. Наконец, если в значениях, принимаемых случайными числами, не усматривается никакой статистической связи, их корреляционный момент равен нулю. Такие случайные числа считаются независимыми (рис. 42, *в*). **Обратное утверждение о том, что при R = 0 случайные числа или величины независимы, неверно.** Только в частном случае, когда случайные числа или величины подчиняются нормальному закону распределения вероятности, выполнение условия R = 0 означает их независимость.

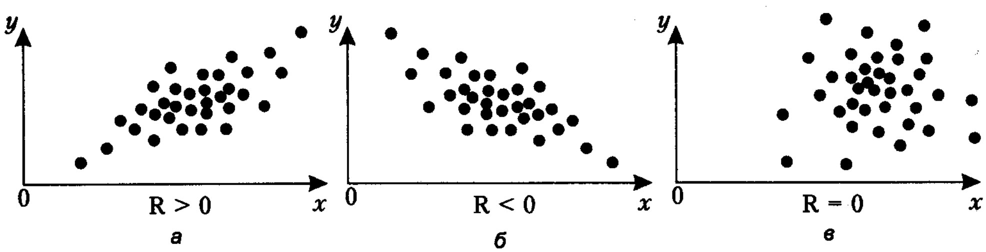


Рис. 42. Варианты статистической связи между двумя случайными числами

На практике вместо смешанного центрального момента второго порядка может быть вычислена лишь его оценка

$$\hat{R} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\hat{\bar{x}}\right)\left(y_i-\hat{\bar{y}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i - \hat{\bar{x}}\hat{\bar{y}}.$$

Переходя в выражениях (20) и (21) к оценкам, получим:

$$\theta_Z = \frac{\partial f}{\partial X}\theta_X + \frac{\partial f}{\partial Y}\theta_Y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\theta_X^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}\theta_Y^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}S_X^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}S_Y^2 + \ldots;$$

$$S_Z^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^2 S_X^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^2 S_Y^2 + 2\frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial f}{\partial Y}\hat{R};$$

$$S_Z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X}S_X\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}S_Y\right)^2 + 2\frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial f}{\partial Y}\hat{R}},$$

где частные производные называются ***функциями влияния***. В случае большого числа независимых результатов измерений

$$S_Z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X}S_X\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}S_Y\right)^2 + \ldots} \qquad (22)$$

Пример 48

Найти стандартное отклонение площади квадрата в примере 46 по формуле (22).

Решение. Так как $s = r_1 \cdot r_2$, $\frac{ds}{dr_1} = r_2$; $\frac{ds}{dr_2} = r_1$. Используя вместо r_1 и r_2 их средние арифметические значения $\hat{\bar{r}}_1 = \hat{\bar{r}}_2 = \hat{\bar{r}}$, получим

$$S_S = \sqrt{\hat{\bar{r}}^2 S_r^2 + \hat{\bar{r}}^2 S_r^2} = \hat{\bar{r}} S_r \sqrt{2}.$$

Числовые значения $\hat{\bar{r}}$ и S_r^2 вычислены в примере 39. Подставляя их, найдем

$$S_S = 4{,}1,$$

что соответствует ранее полученному результату.

Пример 49

Решить пример 40 методом приближенных вычислений на уровне оценок числовых характеристик.

Решение

1. Согласно выражению (18),

$$\hat{\bar{r}}^2 = 4{,}1^2 = 16{,}8.$$

Поправка на неточность этого значения

$$\theta_r = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}r^2\right)S_r^2 = S_r^2 = 0{,}5,$$

откуда окончательно

$$\hat{\overline{r^2}} = 16{,}8 + 0{,}5 = 17{,}3,$$

что соответствует результату, полученному в примере 40.

2. По формуле (22)

$$S_{r^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial r^2}{\partial r}S_r\right)^2} = \sqrt{4r^2 S_r^2} = 2rS_r = 5{,}77,$$

где расхождение в последнем знаке с результатом, полученным в примере 40, свидетельствует о приближенном характере вычислений.

4.5.4. Решение систем уравнений, содержащих результаты измерений

Наиболее общим случаем функционального преобразования результатов измерений является преобразование одной многомерной величины, изображаемой точкой с координатами A, B, C, ... в n-мерном пространстве, в другую многомерную величину Q, изображаемую точкой с координатами Q_1, Q_2, ..., Q_m в m-мерном пространстве. Результаты измерений A, B, C, ... образуют одну систему случайных значений, а координаты Q_1, Q_2, ..., Q_m — другую, причем $m \le n$.

Многомерная интегральная функция распределения вероятности системы случайных значений $F(Q_1, Q_2, ..., Q_m)$ в рассматриваемом случае представляет собой вероятность того, что

$$\begin{aligned} &f_1(A, B, C, ...) < Q_1; \\ &f_2(A, B, C, ...) < Q_2; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &f_m(A, B, C, ...) < Q_m. \end{aligned}$$

Совокупность этих неравенств определяет некоторую область G в m-мерном пространстве, причем ни одно из неравенств не нарушается, если точки с координатами A, B, C, ... находятся в пределах этой области. Вероятность последнего

$$F(Q_1, Q_2, ..., Q_m) = \int ...{}_G... \int p(A, B, C, ...)\, dA\, dB\, dC\, ...$$

Если результаты измерений независимы, то

$$F(Q_1, Q_2, ..., Q_m) = \int ...{}_G... \int p_A(A)\, p_B(B)\, p_C(C) ... dA\, dB\, dC\, ...$$

Плотность вероятности системы случайных значений

$$p(Q_1, Q_2, ..., Q_m) = \frac{\partial^m F}{\partial Q_1 ... \partial Q_m}.$$

На практике иногда представляет интерес вероятностно-статистическое описание каждого из значений Q_1, Q_2, ...,Q_m в отдельности. Эта задача решается путем интегрирования $F(Q_1, Q_2, ..., Q_m)$ по остальным переменным. В то же время преобразование одной системы случайных значений (A, B, C, ...) в другую (Q_1, Q_2, ...,Q_m) может быть представлено **совокупностью** уравнений

$$\begin{aligned} &f_1(A, B, C, ...) = Q_1; \\ &f_2(A, B, C, ...) = Q_2; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &f_m(A, B, C, ...) = Q_m, \end{aligned}$$

не предполагающей их совместного решения. Каждое из этих уравнений, называемых *совокупными*, решается методами, рассмотренными в п.п. 4.5.2, 4.5.3.

Если совокупные уравнения являются **линейными**, то преобразование одной системы случайных значений в другую может быть представлено в матричной форме, например,

$$\begin{vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A \\ B \\ C \end{vmatrix},$$

где d_{ij} — коэффициенты в совокупных уравнениях.

Принципиально другим является случай, когда требуется определить значения Q_1, Q_2, ..., Q_m, связанные со значениями A, B, C, ..., определяемыми посредством измерений, системой линейных уравнений

$$\begin{cases} f_1(Q_1, Q_2, ..., Q_m, A, B, ...) = 0; \\ f_2(Q_1, Q_2, ..., Q_m, A, B, ...) = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(Q_1, Q_2, ..., Q_m, A, B, ...) = 0, \end{cases}$$

предполагающей их **совместное** решение. После подстановки в эти уравнения, называемые *совместными*, полученных экспериментально значений $\tilde{A}$, $\hat{\tilde{B}}$, ..., они принимают вид:

$$\begin{cases} f_1(Q_1, Q_2, ..., Q_m) = 0; \\ f_2(Q_1, Q_2, ..., Q_m) = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(Q_1, Q_2, ..., Q_m) = 0, \end{cases}$$

где знак равенства носит уже чисто условный характер, так как коэффициенты, входящие в эти уравнения, выражены через результаты измерений, не равные в точности значениям A, B, ... Поэтому эти уравнения называются *условными*. Идея их решения *методом наименьших квадратов* принадлежит Гауссу.

Если в условные уравнения ввести поправки θ_i, обращающие их в строгие тождества и называемые в данном случае *невязками*, то метод наименьших квадратов будет состоять в том, чтобы найти такие оценки $\hat{Q}_1$, $\hat{Q}_2$, ..., $\hat{Q}_m$ значений Q_1, Q_2, ..., Q_m, при которых сумма квадратов невязок была бы минимальной, то есть в уравнениях

$$\begin{cases} f_1(\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, ..., \hat{Q}_m) + \theta_1 = 0; \\ f_2(\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, ..., \hat{Q}_m) + \theta_2 = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, ..., \hat{Q}_m) + \theta_n = 0 \end{cases}$$

величины θ_i удовлетворяли бы условию $\sum_{i=1}^{n} \theta_i^2 = \min$.

Так как

$$-\theta_i = f_i(\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, ..., \hat{Q}_m),$$

то требование минимизации суммы квадратов невязок можно записать следующим образом[1]:

$$\sum_{i=1}^{n}\theta_i^2=\sum_{i=1}^{n}f_i^2(\hat{Q}_1,\hat{Q}_2,...,\hat{Q}_m)=\min.$$

Функция нескольких переменных $\sum_{i=1}^{n}f_i^2$ достигает минимума в точке, где все ее частные производные равны нулю. Поэтому оценки интересующих нас значений находятся в результате решения системы уравнений

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}f_i\dfrac{\partial f_i}{\partial\hat{Q}_1}=0;\\ \sum_{i=1}^{n}f_i\dfrac{\partial f_i}{\partial\hat{Q}_2}=0;\\ \dots\dots\dots\dots\\ \sum_{i=1}^{n}f_i\dfrac{\partial f_i}{\partial\hat{Q}_m}=0.\end{cases}$$

Обозначим коэффициенты при неизвестных в условных уравнениях через $q_{i,j}$, а свободный член через l_i. Тогда последние уравнения можно будет представить в виде:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}(q_{i1}\hat{Q}_1+q_{i2}\hat{Q}_2+...+q_{im}\hat{Q}_m-l_i)q_{i1}=0;\\ \sum_{i=1}^{n}(q_{i1}\hat{Q}_1+q_{i2}\hat{Q}_2+...+q_{im}\hat{Q}_m-l_i)q_{i2}=0;\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \sum_{i=1}^{n}(q_{i1}\hat{Q}_1+q_{i2}\hat{Q}_2+...+q_{im}\hat{Q}_m-l_i)q_{im}=0.\end{cases}$$

Раскрыв в них скобки, получим систему так называемых *нормальных* уравнений:

$$\begin{cases}\hat{Q}_1\sum_{i=1}^{n}q_{i1}q_{i1}+\hat{Q}_2\sum_{i=1}^{n}q_{i1}q_{i2}+...+\hat{Q}_m\sum_{i=1}^{n}q_{i1}q_{im}=\sum_{i=1}^{n}q_{i1}l_i;\\ \hat{Q}_1\sum_{i=1}^{n}q_{i2}q_{i1}+\hat{Q}_2\sum_{i=1}^{n}q_{i2}q_{i2}+...+\hat{Q}_m\sum_{i=1}^{n}q_{i2}q_{im}=\sum_{i=1}^{n}q_{i2}l_i;\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \hat{Q}_1\sum_{i=1}^{n}q_{im}q_{i1}+\hat{Q}_2\sum_{i=1}^{n}q_{im}q_{i2}+...+\hat{Q}_m\sum_{i=1}^{n}q_{im}q_{im}=\sum_{i=1}^{n}q_{im}l_i,\end{cases}$$

[1] Если условные уравнения неравноценны, то каждое из них берется со своим весом g_i. В этом случае минимизируется

$$\sum_{i=1}^{n}g_i^2\theta_i^2=\sum_{i=1}^{n}g_i^2\theta_i^2(\hat{Q}_1,\hat{Q}_2,\dots,\hat{Q}_m)=\min.$$

Порядок дальнейших расчетов не меняется. Веса условных уравнений выбираются обратно пропорциональными их дисперсиям, но так, чтобы $\sum_{i=1}^{n}g_i=1$.

которая будет более обозримой, если суммирование по i обозначить квадратными скобками. При таком обозначении, введенном Гауссом,

$$\begin{cases} [q_1q_1]\hat{Q}_1 + [q_1q_2]\hat{Q}_2 + \ldots + [q_1q_m]\hat{Q}_m = [q_1l]; \\ [q_2q_1]\hat{Q}_1 + [q_2q_2]\hat{Q}_2 + \ldots + [q_2q_m]\hat{Q}_m = [q_2l]; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [q_mq_1]\hat{Q}_1 + [q_mq_2]\hat{Q}_2 + \ldots + [q_mq_m]\hat{Q}_m = [q_ml]. \end{cases}$$

Число нормальных уравнений равно числу неизвестных, так что эта система имеет обычное решение:

$$\hat{Q}_1 = \frac{D_1}{D}, \hat{Q}_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, \hat{Q}_m = \frac{D_m}{D},$$

где главный определитель (детерминант) системы

$$D = \begin{vmatrix} [q_1q_1] & [q_1q_2] \cdots [q_1q_m] \\ [q_2q_1] & [q_2q_2] \cdots [q_2q_m] \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ [q_mq_1] & [q_mq_2] \cdots [q_mq_m] \end{vmatrix},$$

а определители $D_1, D_2, \ldots, D_m$ получаются из главного определителя D путем замены столбца, составленного из коэффициентов при неизвестном $\hat{Q}_j$, столбцом, составленным из свободных членов, например,

$$D_2 = \begin{vmatrix} [q_1q_1] & [q_1l] & \cdots [q_1q_m] \\ [q_2q_1] & [q_2l] & \cdots [q_2q_m] \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ [q_mq_1] & [q_ml] & \cdots [q_mq_m] \end{vmatrix},$$

Стандартные отклонения оценок $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \ldots, \hat{Q}_m$ выражаются через невязки и коэффициенты в условных уравнениях следующим образом:

$$S_{\hat{Q}_j} = \sqrt{\frac{1}{n-m}\frac{D_{jj}}{D}\sum_{i=1}^{n}\theta_i^2},$$

где D_{jj} — миноры (алгебраические дополнения) элементов $[q_1q_1]$, $[q_2q_2]$, ..., $[q_mq_m]$ главного определителя системы D, то есть определители (m – 1)-го порядка, получающиеся путем вычеркивания в главном определителе j-й строки и j-го столбца.

Пределы, в которых находятся значения $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$, определяют либо исходя из того, что $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \ldots, \hat{Q}_m$ подчиняются закону распределения вероятности Стьюдента (вместо n на рис. 73, приведенном на с. 157, используется в этом случае значение n – m), либо с помощью неравенства П. Л. Чебышева (см. рис. 52 на с. 120).

Пример 50

В соответствии со 2-м, 4-м и 9-м вариантами, представленными в табл. 14, при четырех взвешиваниях были получены следующие значения: $m_б$ = 3,98 кг; $m_т$ = 0,9 кг; $m_б - m_т$ = 3,12 кг; $m_б + m_т$ = 4,96 кг. Определить $\hat{m}_б$ и $\hat{m}_т$ методом наименьших квадратов.

Решение

1. Для числовых значений исходная система условных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} f_1 = m_б - 3{,}98 = 0; \\ f_2 = m_т - 0{,}9 = 0; \\ f_3 = m_б - m_т - 3{,}12 = 0; \\ f_4 = m_б + m_т - 4{,}96 = 0. \end{cases}$$

2. *Если эти условные уравнения равноценные*, то, вводя невязки и переходя к оценкам, которые нужно будет найти из условия минимизации суммы квадратов невязок, получим:

$$\begin{cases} \hat{m}_б - 3{,}98 + \theta_1 = 0; \\ \hat{m}_т - 0{,}9 + \theta_2 = 0; \\ \hat{m}_б - \hat{m}_т - 3{,}12 + \theta_4 = 0; \\ \hat{m}_б + \hat{m}_т - 4{,}96 + \theta_4 = 0. \end{cases}$$

3. Суммирование произведений каждой функции f_i на ее производную по первой переменной ($\hat{m}_б$) дает

$$(\hat{m}_б - 3{,}98)\cdot 1 + 0 + (\hat{m}_б - \hat{m}_т - 3{,}12)\cdot 1 + (\hat{m}_б + \hat{m}_т - 4{,}96)\cdot 1 = 0;$$

по второй ($\hat{m}_т$) –

$$0 + (\hat{m}_т - 0{,}9)\cdot 1 - (\hat{m}_б - \hat{m}_т - 3{,}12)\cdot 1 + (\hat{m}_б + \hat{m}_т - 4{,}96)\cdot 1 = 0.$$

Таким образом, система нормальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} 3\hat{m}_б + 0 = 12{,}06; \\ 0 + 3\hat{m}_т = 2{,}74. \end{cases}$$

4. Каждое из полученных нормальных уравнений дает значение одной из искомых оценок, но, следуя общей схеме расчетов, напишем

$$\hat{m}_б = \frac{\begin{vmatrix} 12{,}06 & 0 \\ 2{,}74 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{36{,}18}{9} = 4{,}02; \quad \hat{m}_т = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 12{,}06 \\ 0 & 2{,}74 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{8{,}22}{9} = 0{,}91.$$

5. При таких значениях оценок невязки

$$\theta_1 = -0{,}04;\ \theta_2 = -0{,}01;\ \theta_3 = 0{,}01;\ \theta_4 = 0{,}03,$$

а сумма их квадратов

$$\sum_{i=1}^{4} \theta_i^2 = 0{,}0016 + 0{,}0001 + 0{,}0001 + 0{,}0009 = 0{,}0027.$$

6. Стандартное отклонение первой оценки

$$S_{\hat{m}_б} = \sqrt{\frac{1}{4-2}\cdot\frac{3}{9}\cdot 0{,}0027} = 0{,}02,$$

второй —

$$S_{\hat{m}_т} = \sqrt{\frac{1}{4-2}\cdot\frac{3}{9}\cdot 0{,}0027} = 0{,}02.$$

7. Рассмотрим теперь случай, когда заранее известно, что *точность взвешивания тары примерно в 1,6 раза выше, чем консервированного продукта брутто*:

$$\sigma^2_{\hat{m}_б} \approx 2{,}5\sigma^2_{m_т}.$$

Ценность второго условного уравнения тогда больше, чем первого. Если учитывать ценность условных уравнений весовыми коэффициентами, обратно пропорциональными их дисперсиям, то

$$g_1 = 0{,}2;\ g_2 = 0{,}5;\ g_3 = 0{,}15;\ g_4 = 0{,}15,$$

так как дисперсии третьего и четвертого условных уравнений равны сумме двух первых, а сумма всех весовых коэффициентов должна равняться единице.

8. Суммирование умноженных на g_i^2 произведений каждой функции f_i на ее производную по первой переменной ($\hat{m}_б$) теперь даст

$$0{,}04(\hat{m}_б - 3{,}98)\cdot 1 + 0 + 0{,}0225(\hat{m}_б - \hat{m}_т - 3{,}12)\cdot 1 + \\ + 0{,}0225(\hat{m}_б + \hat{m}_т - 4{,}96)\cdot 1 = 0;$$

по второй ($\hat{m}_т$) —

$$0 + 0{,}25(\hat{m}_т - 0{,}9)\cdot 1 - 0{,}0225(\hat{m}_б - \hat{m}_т - 3{,}12)\cdot 1 + 0{,}0225(\hat{m}_б + \hat{m}_т - 4{,}96)\cdot 1 = 0.$$

Таким образом, система нормальных уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}085\hat{m}_б + 0 = 0{,}341; \\ 0 + 0{,}295\hat{m}_т = 0{,}226. \end{cases}$$

9. Как непосредственно, так и с помощью определителей, получаем

$$\hat{m}_б = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}341 & 0 \\ 0{,}266 & 0{,}295 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0{,}085 & 0 \\ 0 & 0{,}295 \end{vmatrix}} = \frac{0{,}101}{0{,}025} = 4{,}01;$$

$$\hat{m}_т = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}085 & 0{,}341 \\ 0 & 0{,}266 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0{,}085 & 0 \\ 0 & 0{,}295 \end{vmatrix}} = \frac{0{,}023}{0{,}025} = 0{,}90.$$

10. Невязки, обращающие в тождества условные уравнения,

$$\theta_1 = 0{,}03;\ \theta_2 = 0;\ \theta_3 = 0{,}01;\ \theta_4 = 0{,}05.$$

11. Стандартные отклонения оценок $\hat{Q}_1$, $\hat{Q}_2$, ..., $\hat{Q}_m$ при неравноценных условных уравнениях:

$$S_{\hat{Q}_j} = \sqrt{\frac{1}{n-m}\frac{D_{jj}}{D}\sum_{i=1}^{n} g_i^2 \theta_i^2}.$$

Отсюда

$$S_{\hat{m}_б} = \sqrt{\frac{1}{4-2}\cdot\frac{0{,}295}{0{,}025}(0{,}04\cdot 0{,}0009 + 0{,}0225\cdot 0{,}0001 + 0{,}0225\cdot 0{,}0025)} = 0{,}024;$$

$$S_{\hat{m}_т} = \sqrt{\frac{1}{4-2}\cdot\frac{0{,}085}{0{,}025}\cdot 0{,}0000955} = 0{,}013.$$

Глава 5

Однократное измерение

5.1. Однократное измерение по шкале порядка. Теория индикатора

Однократное измерение по шкале порядка выполняется в последовательности, приведенной на рис. 43.

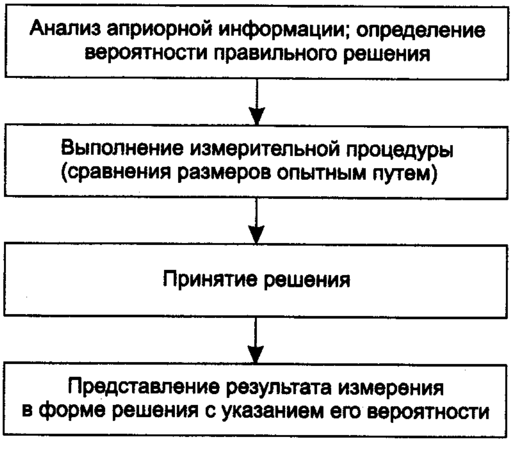


Рис. 43. Последовательность выполнения однократного измерения по шкале порядка

На основании анализа априорной информации устанавливается вероятность правильного решения P. После этого выполняется основная измерительная процедура: сравнение между собой размеров $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_i$ и $\mathbf{Q}_j$. В зависимости от результата сравнения принимается *решение* относительно неравенства $\mathbf{Q} \gtrless \mathbf{Q}_j$. Результат измерения представляет собой *решение с указанием его вероятности* (см. п. 4.3.1).

Иногда показателем качества результата измерения служит вероятность того, что оно является ошибочным. Например, если известно, что при неоднократном выполнении таких же измерений ранее при $Q < Q_j$ в 20 % случаев принималось ошибочное решение $Q \geq Q_j$, то вероятность такой ошибки $P_I \approx 0{,}2$. Если в 10 % случаев при $Q \geq Q_j$ принималось решение $Q < Q_j$, то вероятность этой ошибки $P_{II} \approx 0{,}1$. Понятно, что чем больше вероятность ошибки при принятии решения, тем ниже качество результата измерения. При $Q >> Q_j$ или $Q << Q_j$ вероятностями ошибок можно пренебречь. При $Q \geq Q_j$, $Q \leq Q_j$ и $Q \approx Q_j$ с ними нужно считаться. Таким образом, вероятности ошибок зависят от априорной и от апостериорной информации — силы неравенств в выражении (6).

Разновидностью однократного измерения по шкале порядка служит *контрольно-измерительная операция*, при которой *случайный размер* $\boldsymbol{Q}$ (например, размер какого-нибудь серийно выпускаемого изделия при выборочном контроле) сравнивается с нормой. На основании решения опытным путем неравенства $\boldsymbol{Q} \gtrless Q_п$, где $Q_п$ — некоторое пороговое значение случайного размера $\boldsymbol{Q}$, связанное с нормой, изделие признается годным или бракуется. При этом возможны ошибочные решения с вероятностями ошибок как I (P_I), так и II (P_{II}) рода. Ошибкой I рода является признание годного изделия бракованным, а ошибкой II рода — пропуск брака, то есть признание бракованного изделия годным.

Другой разновидностью однократного измерения по шкале порядка является *обнаружение полезного сигнала* на фоне случайных помех. Как уже отмечалось в п. 4.3.1, средства измерений, решающие задачу обнаружения, называются *индикаторами*. В этом случае $Q_п$ называется *порогом обнаружения*. На основании решения опытным путем неравенства $\boldsymbol{Q} \gtrless Q_п$ принимается одно из следующих решений:

$$\begin{cases} \text{если } \boldsymbol{Q} \leq Q_п, \text{ то } \boldsymbol{Q} \text{ представляе собой случайную помеху;} \\ \text{если } \boldsymbol{Q} > Q_п, \text{ то в } \boldsymbol{Q} \text{ содержится полезный сигнал.} \end{cases}$$

Особую сложность представляет обнаружение сигналов, мощность которых соизмерима или даже меньше мощности помех. В этих условиях вероятность ошибочных решений очень велика. Поэтому в состав индикатора включают *оптимальный* (согласованный со спектром сигнала) селективный фильтр, выделяющий полезный сигнал на фоне помех. Структурная схема такого индикатора показана на рис. 44.

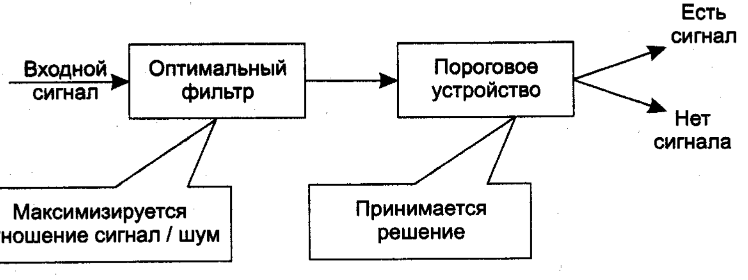


Рис. 44. Типовая структурная схема индикатора

Предположим, что индикатор предназначен для обнаружения прямоугольного импульса на фоне *белого шума* — случайных помех со средним значением, равным нулю, и равномерным энергетическим спектром $G(\omega) = \text{const}$. Амплитудный спектр прямоугольного импульса и энергетический спектр помехи на входе и выходе оптимального фильтра показаны на рис. 45 (*а* и *б* соответственно). Если амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) фильтра $K(\omega)$ согласована со спектром входного сигнала и имеет вид, показанный на рис. 45, *а*, то подавление основных энергонесущих составляющих полезного сигнала происходит незначительно, в то время как энергия помехи ослабляется существенно. В результате отношение сигнал/помеха, пропорциональное отношению заштрихованных площадей на рис. 45, заметно отличается на входе и выходе оптимального фильтра. Выигрыш получается тем более значительным, чем сложнее входной сигнал. В этом нетрудно убедиться, рассмотрев АЧХ фильтра, оптимального последовательности прямоугольных импульсов. Как показано на рис. 46, оптимальный фильтр, получивший название *гребенчатого*, отфильтровывает индивидуально каждую гармонику полезного сигнала. Энергия помехи в промежутках между резонансными частотами подавляется.

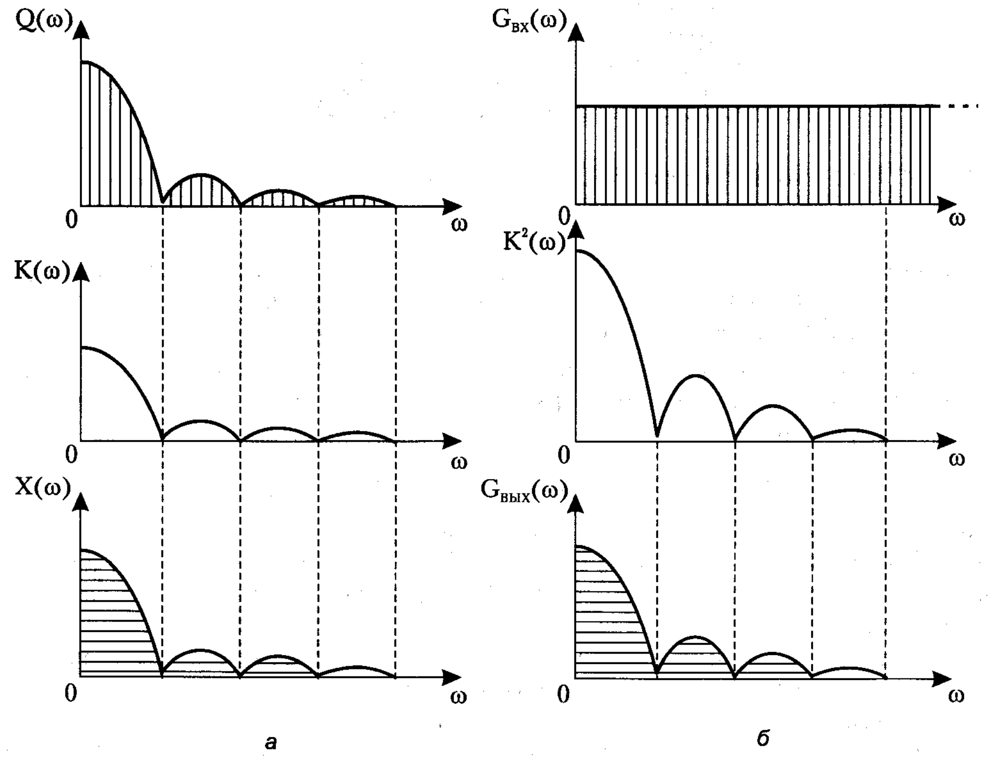


Рис. 45. Прохождение полезного сигнала (*а*) и белого шума (*б*) через фильтр, оптимальный для прямоугольного импульса

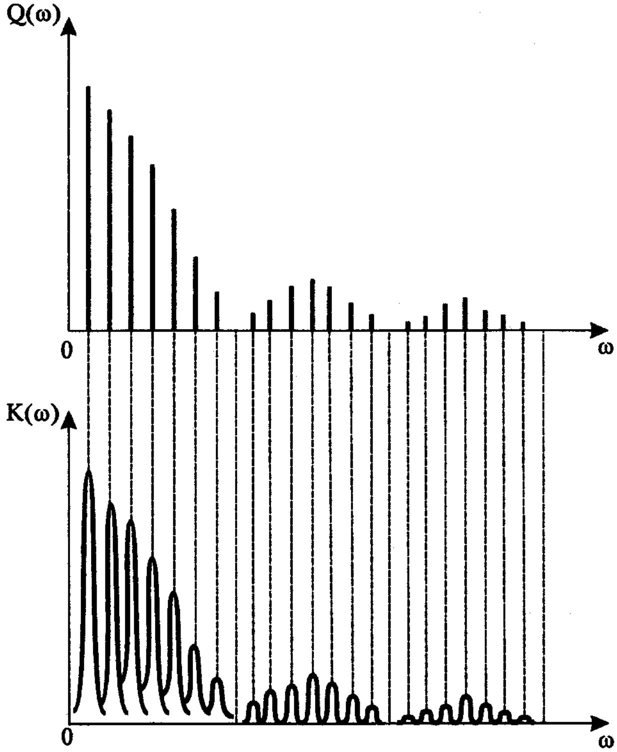


Рис. 46. АЧХ гребенчатого фильтра, оптимального последовательности прямоугольных импульсов

Кроме того, фазочастотная характеристика (ФЧХ) оптимального фильтра такова, что в определенный момент времени t_0 все гармоники полезного сигнала на выходе складываются в фазе. Достигается это благодаря тому, что фаза каждой гармоники задерживается на угол $\psi(\omega)$, равный в момент времени t_0 фазе этой гармоники на входе. Тогда фаза каждой гармоники на выходе фильтра в момент времени t_0

$$\Theta(\omega) = \omega t_0 + \varphi(\omega) + \psi(\omega) = \omega t_0 + \varphi(\omega) - \omega t_0 - \varphi(\omega) = 0,$$

гармоники складываются в фазе, образуя выброс, и максимизируется отношение пиковой мощности сигнала к эффективной мощности помехи, ибо начальные фазы составляющих помехи случайны и на выходе фильтра их фазы не совпадают.

Оптимальный фильтр искажает, конечно, форму входного сигнала, но для решения задачи *обнаружения* это не имеет значения.

После максимизации отношения сигнал/помеха можно с большей уверенностью приступать к решению вопроса о том, является ли мгновенное значение напряжения на выходе индикатора помехой или совокупностью помехи и полезного сигнала. Рассмотрим решение этого вопроса на примере обнаружения сигнала на фоне *нормальных* случайных помех при *непрерывном* отсчете. Это означает наличие следующей априорной информации: мгновенное значение напряжения u на выходе индикатора при отсутствии полезного сигнала подчиняется нормальному закону распределения вероятности со средним значением, равным нулю, и дисперсией (мощностью помех) σ_u^2:

$$\mathrm{p_п}(u) = \frac{1}{\sigma_u\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_u^2}}. \tag{23}$$

При наличии полезного сигнала $\mathrm{u_c}$ плотность вероятности совокупности сигнала и помехи на выходе индикатора

$$\mathrm{p_{сп}}(u) = \frac{1}{\sigma_u\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-\bar{u})^2}{2\sigma_u^2}}, \tag{24}$$

где $\bar{u} = \mathrm{u_c}$. Графики этих зависимостей, а также соответствующие функции распределения вероятности $\mathrm{F_п}(u)$ и $\mathrm{F_{сп}}(u)$ приведены на рис. 47.

Решение о наличии полезного сигнала принимается по правилу:

$$\begin{cases} \text{при } u \le \mathrm{U} \text{ сигнала нет;} \\ \text{при } u > \mathrm{U} \text{ сигнал есть,} \end{cases}$$

где U — некоторое *пороговое значение напряжения*. При этом опять-таки возможны ошибки двоякого рода. *Ошибка I рода* состоит в том, что при $u > \mathrm{U}$ принимается решение «сигнал есть», в то время как его нет. В радиолокации, где впервые стала применяться *теория статистических решений*, такая ошибка называется «ложной тревогой». Вероятность этой ошибки при условии, что сигнала нет, то есть *условная вероятность ошибки I рода*

$$\alpha = \int_{\mathrm{U}}^{\infty} \mathrm{p_п}(u)\mathrm{d}u = 1 - \mathrm{F_п}(\mathrm{U}). \tag{25}$$

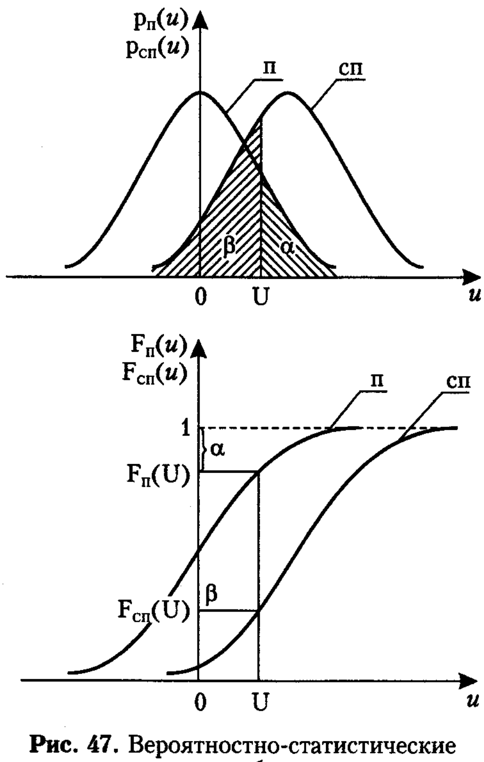


Рис. 47. Вероятностно-статистические закономерности при обнаружении сигнала на фоне нормальных случайных помех

Ошибка II рода состоит в том, что при $u \le \mathrm{U}$ принимается решение «сигнала нет», в то время как он есть. В теории обнаружения такая ошибка называется «пропуском сигнала», а в радиолокации — «пропуском цели». Вероятность этой ошибки при условии, что сигнал есть, то есть *условная вероятность ошибки II рода*

$$\beta = \int_{-\infty}^{U} p_{сп}(u)du = F_{сп}(U). \qquad (26)$$

Понятно, что вероятности ошибок желательно минимизировать. Однако, как видно на рис. 47, увеличение порогового значения напряжения U, приводящее к уменьшению α, увеличивает β, и наоборот. Следовательно, выбор значения U должен быть *оптимальным*, удовлетворяющим противоречивым требованиям.

При дефиците априорной информации, когда о сигнале, который нужно обнаружить, ничего не известно, требования к β не могут быть сформулированы. В таком случае можно обеспечить лишь заданные требования к α. Для этого *порог обнаружения* U рассчитывается по формуле

$$\alpha = 1 - F_п(U) = \frac{1}{2} - L\left(\frac{U}{\sigma_u}\right),$$

где L — интеграл вероятности (функция Лапласа). С помощью таблицы (например, табл. 9) при заданной α находится аргумент функции Лапласа и при известной из априорной информации мощности помех устанавливается значение U.

Пример 51

При испытании объекта на электромагнитную совместимость контролируется его излучение на фиксированной частоте. Если объект удовлетворяет предъявляемым требованиям, то мгновенное значение напряжения на выходе индикатора (напряжение «шума») подчиняется нормальному закону с плотностью вероятности (23) и σ_u^2 = 2,25 В^2. Если объект не удовлетворяет предъявляемым требованиям, то мгновенное значение напряжения на выходе индикатора подчиняется нормальному закону с плотностью вероятности (24). Рассчитать пороговое значение напряжения на выходе индикатора, обеспечивающее условную вероятность ошибки I рода α = 0,1.

Решение

1. Используя последнюю формулу, получим:

$$\alpha = 1 - F_п(U) = \frac{1}{2} - L\left(\frac{U}{\sigma_u}\right) = 0{,}1.$$

Отсюда $L\left(\frac{U}{\sigma_u}\right) = 0{,}4.$

2. По табл. 9 находим: $\frac{U}{\sigma_u} = 1{,}3.$
3. Окончательно: U = 1,95 В.

4. Правило принятия решения формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} \text{при } u \le 1{,}95 \text{ В объект удовлетворяет предъявленным требованиям;} \\ \text{при } u > 1{,}95 \text{ В объект не удовлетворяет предъявленным требованиям.} \end{cases}$$

При этом условная вероятность ошибки I рода составляет 0,1.

Весьма поучительным является другой пример использования *теории статистических решений* при однократном измерении.

Пример 52

Определить цену деления Δ шкалы отсчетного устройства измерительного прибора, если его показание X подчиняется нормальному закону распределения вероятности со средним квадратическим отклонением σ_X.

Решение. Пусть решение принимается с округлением до ближайшей отметки шкалы. В нормальных условиях измерений, когда поправки не вносятся, $\overline{X} = \overline{Q} \equiv Q$. **Если $\overline{X}$ удалено от отметки шкалы X_0 не более чем на $\frac{\Delta}{2}$, как это показано на рис. 48**, то при попадании случайного значения X в интервал $\left[X_0 - \frac{\Delta}{2}; X_0 + \frac{\Delta}{2}\right]$ округление его до значения X_0 будет *правильным решением*, в то время как округление до предыдущей или следующей отметки шкалы при $X \le X_0 - \frac{\Delta}{2}$ или $X \ge X_0 + \frac{\Delta}{2}$ соответственно будет *ошибкой I рода.*

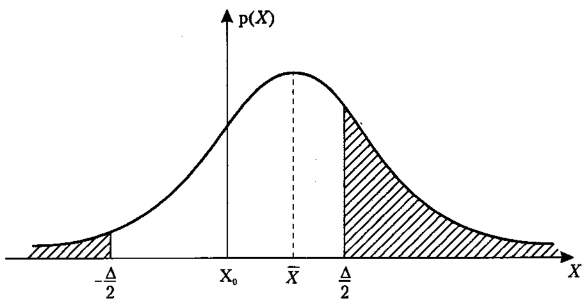


Рис. 48. К определению цены деления шкалы

Условная вероятность ошибки I-го рода, соответствующая заштрихованной площади на рис. 48,

$$\alpha = \int_{-\infty}^{-\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\overline{X})^2}{2\sigma_X^2}} dX + \int_{\frac{\Delta}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\overline{X})^2}{2\sigma_X^2}} dX =$$

$$= \frac{1}{2} - L\left(\frac{\frac{\Delta}{2} + \overline{X}}{\sigma_X}\right) + \frac{1}{2} - L\left(\frac{\frac{\Delta}{2} - \overline{X}}{\sigma_X}\right) = 1 - L\left(\frac{\frac{\Delta}{2} + \overline{X}}{\sigma_X}\right) - L\left(\frac{\frac{\Delta}{2} - \overline{X}}{\sigma_X}\right),$$

где $\overline{X}$ может быть любым в интервале от $X_0-\frac{\Delta}{2}$ до $X_0+\frac{\Delta}{2}$. Представим эту ситуацию математической моделью в виде равномерного «закона распределения вероятности $\overline{X}$» на интервале $[X_0-\frac{\Delta}{2};\ X_0+\frac{\Delta}{2}]$:

$$p(\overline{X})=\frac{1}{\Delta}.$$

Тогда среднее значение α при всех возможных значениях $\overline{X}$

$$\overline{\alpha}=\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}}\alpha\cdot p(\overline{X})\cdot d\overline{X}=1-\frac{1}{\Delta}\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}}L\left(\frac{\frac{\Delta}{2}+\overline{X}}{\sigma_X}\right)d\overline{X}-\frac{1}{\Delta}\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}}L\left(\frac{\frac{\Delta}{2}-\overline{X}}{\sigma_X}\right)d\overline{X}.$$

Произведя замену переменных:

$$\frac{\frac{\Delta}{2}+\overline{X}}{\sigma_X}=s;\quad d\overline{X}=\sigma_X ds;\quad \frac{\frac{\Delta}{2}-\overline{X}}{\sigma_X}=t;\quad d\overline{X}=-\sigma_X dt,$$

получим:

$$\overline{\alpha}=1-\frac{\sigma_X}{\Delta}\int_0^{\frac{\Delta}{\sigma_X}}L(s)ds+\frac{\sigma_X}{\Delta}\int_{\frac{\Delta}{\sigma_X}}^{0}L(t)dt=1-2\frac{\sigma_X}{\Delta}\int_0^{\frac{\Delta}{\sigma_X}}L(r)dr,$$

где табличный интеграл:

$$\int L(r)dr=rL(r)+\frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Окончательно:

$$\overline{\alpha}=1-2\frac{\sigma_X}{\Delta}\left[rL(r)+\frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right]_0^{\frac{\Delta}{\sigma_X}}=1-2L\left(\frac{\Delta}{\sigma_X}\right)+\frac{\sigma_X}{\Delta}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1-e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma_X^2}}\right)$$

Так, например,

при $\Delta=4\sigma_X$ $\quad\overline{\alpha}\approx 0{,}2$;

при $\Delta=6\sigma_X$ $\quad\overline{\alpha}\approx 0{,}13$;

при $\Delta=8\sigma_X$ $\quad\overline{\alpha}\approx 0{,}1$.

Общая формула для цены деления шкалы имеет вид:

$$\boxed{\Delta\approx 0{,}8\frac{\sigma_X}{\overline{\alpha}}.}$$

В теории индикатора, если величина сигнала u_c заранее известна, требования к качеству решения предъявляются в форме задания и α, и β. *Порог обнаружения* U и *отношение мощности сигнала к мощности помех* $\frac{u_c^2}{\sigma_u^2}$, обеспечивающие выполнение этих требований, находятся путем решения системы уравнений:

$$\begin{cases} F_п(U) = 1-\alpha; \\ F_{сп}(U) = \beta. \end{cases}$$

Функции распределения вероятности здесь выражаются через интеграл вероятности следующим образом:

$$\begin{cases} L\left(\frac{U}{\sigma_u}\right) = \frac{1}{2} - \alpha; \\ L\left(\frac{\bar{u}}{\sigma_u} - \frac{U}{\sigma_u}\right) = \frac{1}{2} - \beta. \end{cases}$$

Найденное в результате решения первого уравнения значение аргумента функции Лапласа подставляется во второе уравнение, после чего вновь используется табл. 9.

Еще одним примером использования в метрологии теории статистических решений при однократном измерении по шкале порядка является обеспечение должного качества поверки средств измерений.

Технические характеристики средств измерений, оказывающие влияние на результат измерения и его качество, называются *метрологическими характеристиками*. На те из них, которые оказывают *существенное* влияние, устанавливаются *нормы*. Обычно это бывает *номинальное значение* и *допустимое отклонение* от него. Метрологические характеристики, на которые установлены нормы, называются *нормированными метрологическими характеристиками*. Их соответствие установленным нормам должно контролироваться. С этой целью производится определение значений метрологических характеристик (*калибровка* средств измерений) и проверка соответствия их нормам (*поверка* средств измерений).

При поверке средств измерений могут совершаться ошибки как I, так и II рода. Ошибкой I рода является признание метрологически исправного средства измерений неисправным, а ошибкой II рода — метрологически неисправного исправным. И те и другие ошибки рассматриваются как *брак* поверки.

Если для метрологически исправного средства измерений

$$\Delta = \Xi_{max} - \Xi_0 = \Xi_0 - \Xi_{min} -$$

допустимое отклонение нормированной метрологической характеристики Ξ от ее номинального значения Ξ_0, а

$$\delta = \Xi_в - \Xi_0 = \Xi_0 - \Xi_н -$$

допустимое отклонение от номинала результата измерения этой метрологической характеристики с помощью рабочего эталона (будем считать, что результат измерения подчиняется нормальному закону распределения вероятности), то, как видно на рис. 49, условная вероятность ошибки I рода

$$\alpha = 1 - \mathrm{L}\left(\frac{\overline{\Xi} - \Xi_{н}}{\sigma_{\Xi}}\right) - \mathrm{L}\left(\frac{\Xi_{в} - \overline{\Xi}}{\sigma_{\Xi}}\right)$$

зависит от $\overline{\Xi}$. У метрологически исправного средства измерений $\overline{\Xi}$ может быть любым в пределах от Ξ_{min} до Ξ_{max}. Поэтому среднее значение α при всех возможных значениях $\overline{\Xi}$

$$\overline{\alpha} = \frac{1}{\Xi_{max} - \Xi_{min}} \int_{\Xi_{min}}^{\Xi_{max}} \left[1 - \mathrm{L}\left(\frac{\overline{\Xi} - \Xi_{н}}{\sigma_{\Xi}}\right) - \mathrm{L}\left(\frac{\Xi_{в} - \overline{\Xi}}{\sigma_{\Xi}}\right)\right] d\Xi.$$

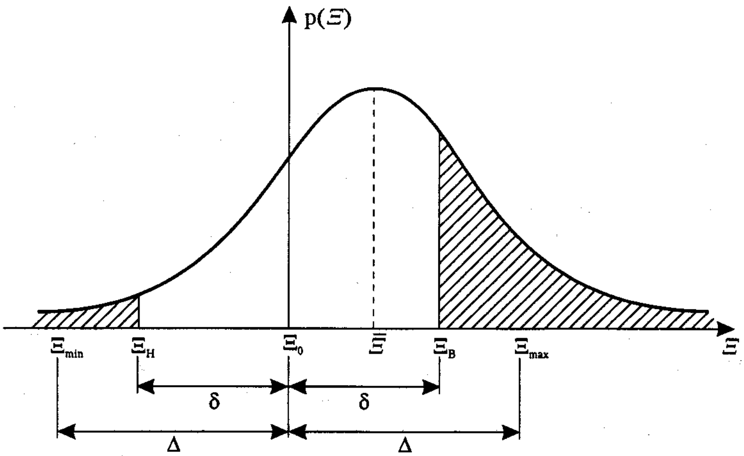


Рис. 49. К определению условной вероятности ошибки I рода при поверке средства измерений

После замены переменных:

$$\frac{\overline{\Xi} - \Xi_{н}}{\sigma_{\Xi}} = s; \quad \frac{\Xi_{в} - \overline{\Xi}}{\sigma_{\Xi}} = t,$$

и использования принятых обозначений последнее выражение приводится к виду:

$$\overline{\alpha} = 1 - \frac{\sigma_{\Xi}}{\Delta} \int_{\frac{\delta-\Delta}{\sigma_{\Xi}}}^{\frac{\delta+\Delta}{\sigma_{\Xi}}} \mathrm{L}(r)\,dr,$$

где табличный интеграл имеет представление, приведенное в примере 52. Окончательно:

$$\overline{\alpha} = 1 - \frac{\Delta+\delta}{\Delta}\mathrm{L}\left(\frac{\Delta+\delta}{\sigma_{\Xi}}\right) + \frac{\Delta-\delta}{\Delta}\mathrm{L}\left(\frac{\Delta-\delta}{\sigma_{\Xi}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sigma_{\Xi}}{\Delta}\left[e^{-\frac{(\Delta-\delta)^2}{2\sigma_{\Xi}^2}} - e^{-\frac{(\Delta+\delta)^2}{2\sigma_{\Xi}^2}}\right].$$

В свою очередь, максимальное значение условной вероятности ошибки II рода, как это следует из рис. 50,

$$\beta_{max} = L\left(\frac{\Delta+\delta}{\sigma_{\Xi}}\right) - L\left(\frac{\Delta-\delta}{\sigma_{\Xi}}\right).$$

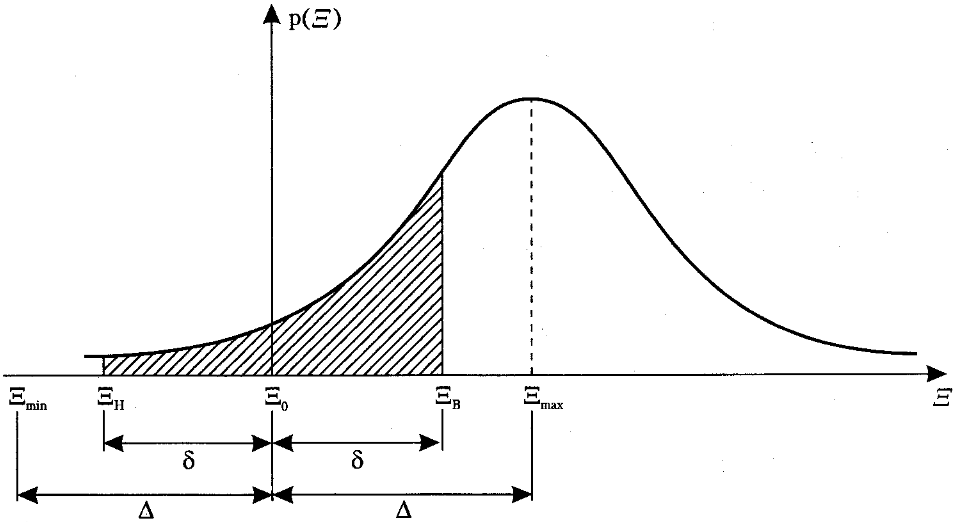


Рис. 50. К определению условной вероятности ошибки II рода при поверке средства измерений

Допустимое отклонение Δ нормированной метрологической характеристики от ее номинального значения указывается в технической документации на средство измерений, а среднее квадратическое отклонение результата ее измерения с помощью рабочего эталона σ_{Ξ} должно быть известно. Поэтому при использовании правила принятия решения:

если Ξ оказывается в пределах интервала $[\Xi_н; \Xi_в]$, то средство измерений признается метрологически исправным;
если Ξ оказывается за пределами интервала $[\Xi_н; \Xi_в]$, то средство измерений признается метрологически неисправным,

брак поверки определяется выбором δ.

Безусловная *вероятность ошибки I рода* в теории индикатора по правилу умножения вероятностей равна условной вероятности, умноженной на вероятность выполнения условия $P_п$:

$$P_I = \alpha P_п.$$

Безусловная *вероятность ошибки II рода*

$$P_{II} = \beta P_{сп}.$$

Вероятности $P_п$ и $P_{сп}$ оцениваются непосредственно перед началом измерения исходя из анализа априорной информации. Результатом измерения является одно из следующих решений:

- сигнала нет;
- сигнал есть.

Вероятность того, что первое решение является правильным, составляет $1 - P_I$. Вероятность того, что правильным является второе решение, равна $1 - P_{II}$.

5.2. Однократное измерение по градуированным шкалам

Подавляющее большинство измерений являются однократными. Можно сказать, что в обиходе, в торговле, во многих областях производственной деятельности выполняются только однократные измерения. В обычных условиях их точность вполне приемлема, а простота, высокая производительность (количество измерений в единицу времени) и низкая стоимость (по оценке трудозатрат) ставят их вне конкуренции. Многие люди до конца своей жизни остаются знакомыми только с однократными измерениями.

У серийно выпускаемых измерительных приборов шкалы отсчетных устройств в большинстве случаев уже проградуированы в значениях измеряемой величины. Первый этап решения обратной задачи теории измерений, следовательно, выполнен, и в результате измерительной процедуры снимается *показание* (10), в которое, при необходимости, нужно внести *поправку*. После внесения поправки получается *результат измерения* (11), (12), который в отличие от *значения измеряемой величины* является случайным. На втором этапе решения обратной задачи неслучайное значение измеряемой величины отождествляется со средним значением результата измерения, область определения которого устанавливается исходя из априорной информации.

Таким образом, **необходимым условием проведения однократного измерения служит наличие априорной информации**. К ней относится, например, информация о виде закона распределения вероятности показания и мере его рассеяния, которая извлекается из опыта предшествовавших измерений. Если ее нет, то используется информация о том, на сколько значение измеряемой величины может отличаться от результата однократного измерения. Такая информация бывает представлена классом точности средства измерений (см. п. 2.2.2). К априорной относится также информация о значении аддитивной или мультипликативной поправки θ. Если оно неизвестно, то это учитывается ситуационной моделью, согласно которой с одинаковой вероятностью, например, значение поправки может быть любым в пределах от θ_{min} до θ_{max}. **Без априорной информации выполнение однократного измерения бессмысленно.**

Последовательность действий при однократном измерении показана на рис. 51. Предварительно проводится тщательный **анализ априорной информации**. В ходе этого анализа уясняется физическая сущность изучаемого явления, уточняется его модель, определяются влияющие факторы и меры, направленные на уменьшение их влияния (термостатирование, экранирование, компенсация электрических и магнитных полей и др.), значения поправок, принимается решение в пользу той или иной методики измерения, выбирается средство измерений, изучаются его метрологические характеристики и опыт выполнения подобных измерений в прошлом. Важным итогом этой предварительной работы должна стать твердая уверенность в том, что точности однократного измерения достаточно для решения поставленной задачи. Если это условие выполняется, то после необходимых приготовлений, включающих установку и подготовку к работе средства измерений, исключение или компенсацию влияющих факторов, выполняется основная измерительная процедура — **получение одного значения отсчета (или показания**, если шкала отсчетного устройства уже проградуирована в значениях измеряемой величины).

Рис. 51. Порядок выполнения однократного измерения

Если измерение выполняется не в нормальных, а в *рабочих условиях*, то в показание вносится поправка, значение которой может быть известно точно или с некоторой неопределенностью. Внесением поправки заканчивается процедура получения результата однократного измерения. После этого выбирается вероятность, определяющая ширину интервала, в пределах которого находится значение измеряемой величины, и устанавливаются границы этого интервала.

Таким образом, конечной целью измерительного эксперимента является получение достоверной количественной информации о значении измеряемой величины Q. На пути к достижению этой цели **получение результата однократного измерения служит промежуточным этапом**. Проанализируем несколько конкретных вариантов.

Вариант 1. *Априорная информация*: отсчет, а следовательно, и показание подчиняются нормальному закону распределения вероятности с известной стандартной неопределенностью типа А. Измерение будет выполняться в рабочих условиях, и в показание нужно внести аддитивную поправку, значение которой равно θ.

В этом случае результат измерения Q (см. формулу (12)) будет подчиняться нормальному закону распределения вероятности с известным средним квадратическим отклонением $\sigma_Q = \sigma_X$, смещенному по отношению к закону распределения вероятности показания X на значение поправки θ, внесение которой обеспечивает правильность результата измерения (см. рис. 30). Для более наглядного решения обратной задачи (см. п. 4.4), по данным табл. 9 построим график зависимости *ширины доверительного интервала* от *доверительной вероятности*. На рис. 52 ему соответствует верхняя кривая.

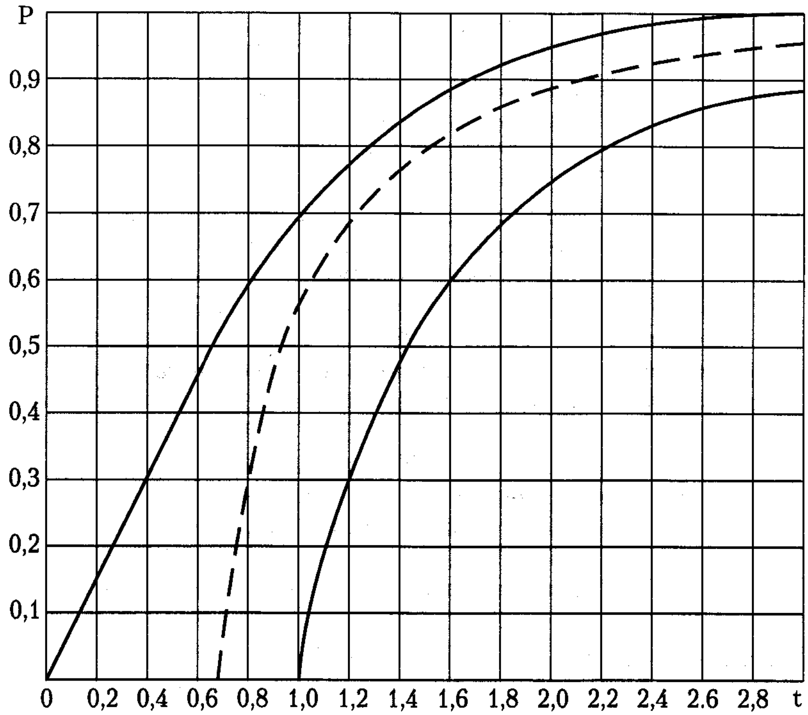


Рис. 52. Вероятность попадания отдельного значения результата измерения в окрестность среднего значения

Задавшись доверительной вероятностью P, можно по верхней кривой на рис. 52 определить параметр t, показывающий, на сколько σ_Q полученное экспериментально значение результата однократного измерения $Q_i = X_i + \theta$ может отличаться от среднего значения $\overline{Q}$, отождествляемого со значением измеряемой величины Q. С той же вероятностью значение измеряемой величины Q находится в интервале $[Q_i - t\sigma_Q;\ Q_i + t\sigma_Q]$. Эта измерительная информация записывается в форме:

$$\boxed{Q = Q_i - t\sigma_Q \ldots Q_i + t\sigma_Q \text{ с вероятностью P.}}$$

Не рекомендуется пользоваться записью $Q = Q_i \pm t\sigma_Q$, так как в силу особенностей человеческой психики при этом возникает некоторая доминанта, акцент на середину интервала, для чего нет никаких оснований. Среди значений Q в интервале $[Q_i - t\sigma_Q;\ Q_i + t\sigma_Q]$ нет предпочтительных.

Вариант 2. *Априорная информация*: отсчет, а следовательно, и показание подчиняются неизвестному закону распределения вероятности с известной стандартной неопределенностью типа А. Измерение будет выполняться в нормальных условиях, так что во внесении поправки нет необходимости.

В данном случае закон распределения вероятности результата измерения будет неизвестен, известным будет лишь его среднее квадратическое отклонение $\sigma_Q = \sigma_X$. Вероятность того, что отдельное значение результата измерения Q_i при любом законе распределения вероятности не будет отличаться от среднего значения $\overline{Q}$ больше чем на половину доверительного интервала $[\overline{Q} - t\sigma_Q;\ \overline{Q} + t\sigma_Q]$, устанавливается *неравенством П. Л. Чебышева* (см. п. 4.4). Иными словами, неравенство П. Л. Чебышева определяет **нижнюю границу** вероятности того, что ни при каком законе распределения вероятности случайное значение результата измерения не окажется за пределами доверительного интервала. Эта граница соответствует нижней кривой на рис. 52. Задавшись доверительной вероятностью Р, можно по нижней кривой на рис. 52 найти параметр t, показывающий самое большое количество σ_Q, на которое экспериментально полученное значение результата однократного измерения $Q_i = X_i$ может отличаться от среднего значения $\overline{Q}$. С той же вероятностью неслучайное значение измеряемой величины Q, отождествляемое с $\overline{Q}$, находится в интервале $[Q_i - t\sigma_Q;\ Q_i + t\sigma_Q]$. Форма, в которой записывается эта измерительная информация, приведена в варианте 1.

При симметричных законах распределения вероятности результата измерения неравенство П. Л. Чебышева имеет вид

$$P\left\{\overline{Q} - t\sigma_Q \le Q_i \le \overline{Q} + t\sigma_Q\right\} \ge 1 - \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{t^2}.$$

Соответствующая граница проходит левее и выше. На рис. 52 она показана пунктиром.

Вариант 3. *Априорная информация* представлена классом точности измерительного прибора. Измерение будет выполняться в нормальных условиях, так что во внесении поправки нет необходимости.

Так как поправка в показание не вносится, закон распределения вероятности результата измерения совпадает с законом распределения вероятности показания, и $\overline{X} = \overline{Q}$. Значение измеряемой величины Q, отождествляемое с $\overline{Q}$ и $\overline{X}$, не может отличаться от значения X_i, которое показывает указатель отсчетного устройства, больше чем на соответствующее классу точности число процентов. Поскольку среди возможных значений Q нет предпочтительных, постольку математической моделью такой ситуации (см. п. 1.1) является равномерный «закон распределения вероятности» Q на интервале возможных значений $[Q_1; Q_2]$, показанный на рис. 53.

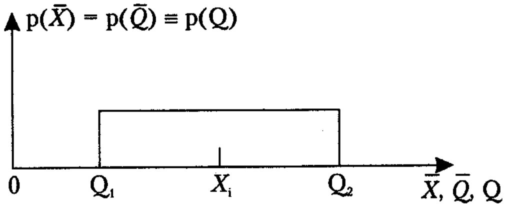


Рис. 53. Математическая модель ситуации, возникающей при использовании класса точности измерительного прибора

«Функция распределения вероятности» Q

$$F(Q)=\int_{Q_1}^{Q} p(Q)\,dQ=\int_{Q_1}^{Q}\frac{1}{Q_2-Q_1}dQ=\frac{1}{Q_2-Q_1}Q\Big|_{Q_1}^{Q}=\frac{Q-Q_1}{Q_2-Q_1}. \qquad (27)$$

«Вероятность» того, что значение Q находится *слева* от середины интервала $[Q_1; Q_2]$ на удалении не более чем ku_Q, равна

$$\frac{1}{2}-F\left(\frac{Q_1+Q_2}{2}-ku_Q\right),$$

а «вероятность» того, что оно находится *в окрестности* середины интервала $\pm ku_Q$, в 2 раза больше:

$$P=1-2F\left(\frac{Q_1+Q_2}{2}-ku_Q\right).$$

Это аналог *доверительной вероятности*, называемый *уровнем доверия*. Коэффициент k, являющийся аналогом параметра t, называется *коэффициентом охвата*, а произведение ku_Q — *расширенной неопределенностью*.

Используя выражение (27) при $Q=\frac{Q_1+Q_2}{2}-ku_Q$ и принимая во внимание (см. п. 1.1), что

$$Q_2-Q_1=2u_Q\sqrt{3},\quad \frac{Q_1+Q_2}{2}-Q_1=u_Q\sqrt{3},$$

окончательно получим:

$$P=\frac{k}{\sqrt{3}}. \qquad (28)$$

На рис. 54 по формуле (28) построена линейная зависимость уровня доверия P от коэффициента охвата k при равномерном «законе распределения вероятности» Q.

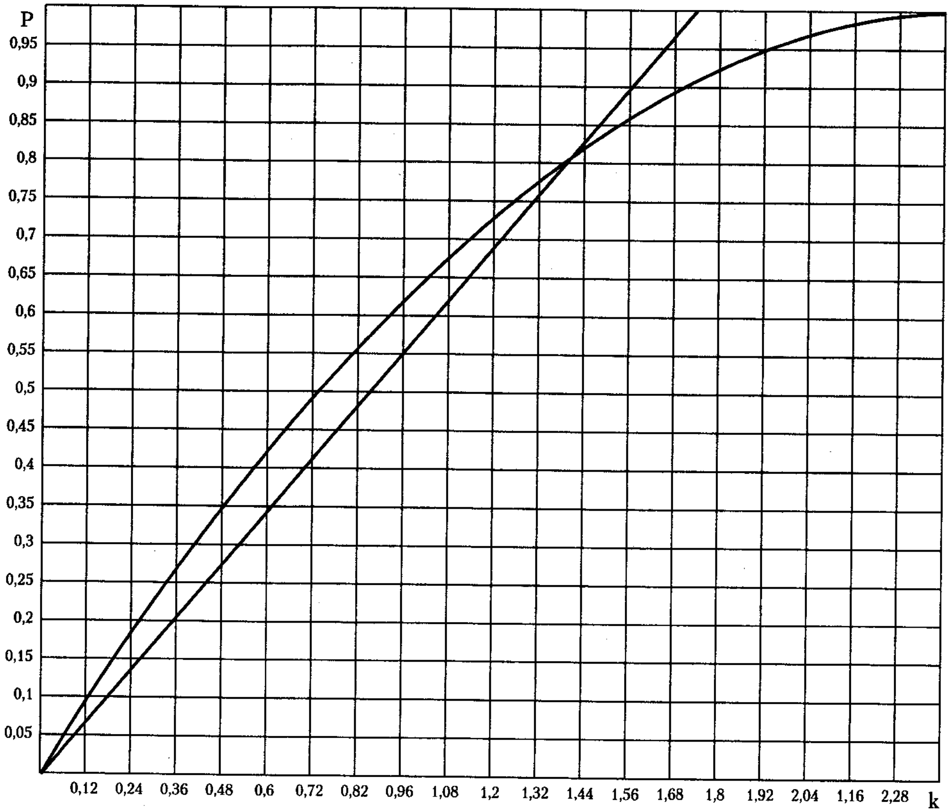


Рис. 54. Зависимость уровня доверия P от коэффициента охвата k

Задавшись уровнем доверия P, можно, используя эту зависимость, определить коэффициент охвата k, показывающий, на сколько u_Q значение измеряемой величины Q может отличаться от своего «среднего значения», равного X_i, то есть указать интервал $[X_i - ku_Q;\ X_i + ku_Q]$, в котором значение измеряемой величины Q находится с выбранным уровнем доверия. Эта измерительная информация записывается в форме:

$$\boxed{Q = X_i - ku_Q \ldots X_i + ku_Q \text{ с уровнем доверия P.}}$$

Продолжение примеров 9–14

В примере 9 при уровне доверия P = 1 и коэффициенте охвата k = 1,732 расширенная неопределенность составляет 1 В. Измеряемое напряжение

U = (123...125) В с уровнем доверия 1,0.

В примере 10 при уровне доверия P = 0,99 и коэффициенте охвата k = 1,71 расширенная неопределенность составляет 0,29 А. Измеряемая сила тока

I = (3,71...4,29) А с уровнем доверия 0,99.

В примере 11 при уровне доверия P = 0,95 и коэффициенте охвата k = 1,65 расширенная неопределенность составляет 0,095 Гц. Измеряемая частота

F = (51,305...51,495) Гц с уровнем доверия 0,95.

В примере 12 при уровне доверия P = 0,9 и коэффициенте охвата k = 1,56 расширенная неопределенность составляет 0,5°. Измеряемый угол сдвига фазы между током и напряжением в электрической цепи

φ = (39...40) ° с уровнем доверия 0,9.

В примере 13 при уровне доверия P = 0,58 и коэффициенте охвата k = 1,0 расширенная неопределенность составляет 0,57 МОм. Измеряемое сопротивление

R = (39,43...40,57) МОм с уровнем доверия 0,58.

В примере 14 при уровне доверия P = 0,5 и коэффициенте охвата k = 0,866 расширенная неопределенность составляет 0,0037 А. Измеряемая сила тока

I = (–24,9963...–25,0037) А с уровнем доверия 0,5.

Вариант 4. *Априорная информация* представлена классом точности измерительного прибора. Измерение будет выполняться в рабочих условиях, и в показание нужно внести аддитивную поправку, значение которой равно θ.

Внесение аддитивной поправки смещает математическую модель $p(\bar{X})$, показанную на рис. 53, влево или вправо, в зависимости от знака θ, так, как это показано, например, на рис. 55.

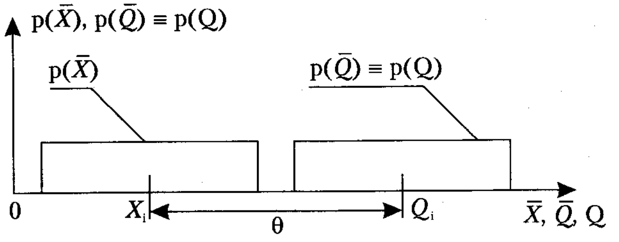


Рис. 55. Внесение аддитивной поправки, значение которой известно точно

Неопределенность измерения при этом не меняется. Задавшись уровнем доверия P, можно по тому же графику на рис. 54 определить коэффициент охвата k, показывающий, на сколько u_Q значение измеряемой величины Q может отличаться от своего «среднего значения», равного $Q_i = X_i + \theta$, то есть указать интервал $[Q_i - ku_Q; Q_i + ku_Q]$, в котором значение измеряемой величины Q находится с выбранным уровнем доверия. Эта измерительная информация записывается в форме:

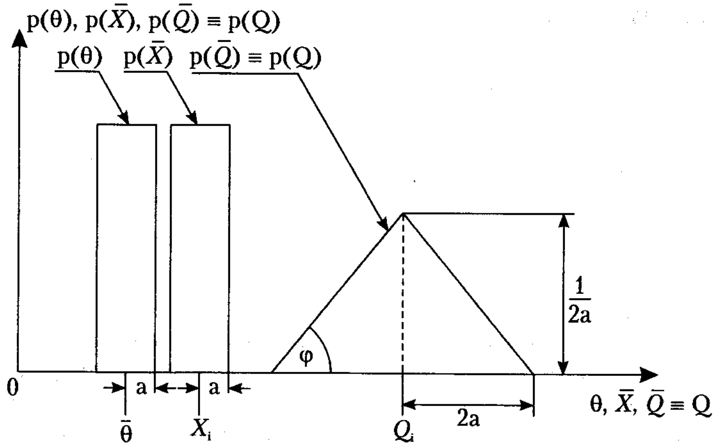
$$\boxed{Q = Q_i - ku_Q \ldots Q_i + ku_Q \text{ с уровнем доверия P.}}$$

Вариант 5. *Априорная информация* представлена классом точности измерительного прибора. Измерение будет выполняться в условиях, при которых в показание нужно внести аддитивную поправку, значение которой находится в интервале от θ_1 до θ_2.

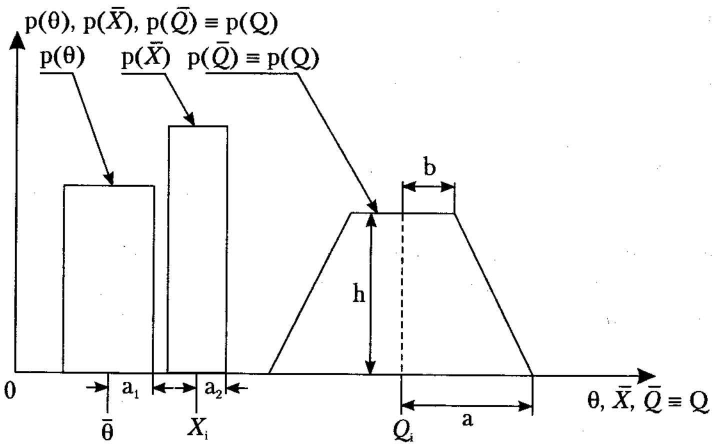
На рис. 56, *а* показаны ситуационные модели $p(\bar{X})$, $p(\theta)$ и их композиция

$$p(\bar{Q}) \equiv p(Q)$$

в предположении, что неопределенности показания и поправки равны. Композицией двух равномерных законов распределения вероятности с одинаковой дисперсией является треугольный закон (закон распределения вероятности Симпсона) со средним значением $Q_i = X_i + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ и параметрами, показанными на рис. 56, *а*.



а



б

Рис. 56. Внесение аддитивной поправки, точное значение которой неизвестно

При $Q_i - 2a \le Q \le Q_i$

$$p(Q) = [Q-(Q_i-2a)]\mathrm{tg}\varphi = \frac{Q-(Q_i-2a)}{4a^2}.$$

Обозначим $Q-(Q_i-2a)=x$, тогда

$$F(x)=\int_0^x \frac{x}{4a^2}dx = \frac{x^2}{8a^2} = \frac{[Q-(Q_i-2a)]^2}{8a^2}.$$

«Вероятность» того, что значение Q находится *слева* от Q_i на удалении не более чем ku_Q, равна

$$\frac{1}{2}-\frac{[(Q_i-ku_Q)-(Q_i-2a)]^2}{8a^2},$$

а «вероятность» того, что оно находится *в окрестности* Q_i на удалении не более чем $\pm\, ku_Q$, в 2 раза больше:

$$P=1-\frac{[(Q_i-ku_Q)-(Q_i-2a)]^2}{4a^2}.$$

Для треугольного закона распределения вероятности $u_Q = \frac{2a}{\sqrt{6}}$. Отсюда

$$P=\frac{k}{\sqrt{6}}\left(2-\frac{k}{\sqrt{6}}\right) \qquad (29)$$

На рис. 54 по формуле (29) построена нелинейная зависимость *уровня доверия* P от *коэффициента охвата* k при треугольном «законе распределения вероятности» Q. Задавшись уровнем доверия P, можно, используя эту зависимость, определить коэффициент охвата k, показывающий, на сколько u_Q значение измеряемой величины Q может отличаться от своего «среднего значения», равного $X_i+\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$, то есть указать интервал $[X_i+\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-ku_Q; X_i+\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+ku_Q]$, в котором значение измеряемой величины Q находится с выбранным уровнем доверия. Эта измерительная информация записывается в форме:

$$\boxed{Q = X_i+\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-ku_Q \ldots X_i+\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+ku_Q \text{ с уровнем доверия P.}}$$

Если неопределенности ситуационных моделей $p(\overline{X})$ и $p(\theta)$ не равны, то композицией двух равномерных законов распределения вероятности с неодинаковыми дисперсиями будет трапецеидальный закон распределения вероятности со средним значением $Q_i = X_i+\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ и параметрами

$$\begin{aligned} a &= a_1+a_2; \\ b &= a_1-a_2; \end{aligned} \quad h=\frac{1}{(1+\beta)a}; \quad \beta=\frac{b}{a}=\frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}.$$

показанными на рис. 56, *б*.

Принимая во внимание, что для трапецеидального закона распределения вероятности

$$u_Q = a\sqrt{\frac{1+\beta^2}{6}},$$

на рис. 54 можно построить зависимость P(k), использование которой позволит определить интервал [Q_1; Q_2], в пределах которого находится значение измеряемой величины Q с выбранным уровнем доверия. Каждому значению β будет соответствовать своя кривая. Так как при b → a трапецеидальный закон переходит в равномерный, а при b → 0 — в треугольный, все кривые будут располагаться между двумя граничными линиями, показанными на рис. 54.

Вариант 6. *Априорная информация*: отсчет, а следовательно, и показание подчиняются нормальному закону распределения вероятности с известной стандартной неопределенностью типа А; значение аддитивной поправки находится в пределах от θ_1 до θ_2.

Среднее значение показания не может быть удалено от его единственного значения X_i больше чем на $\pm t\sigma_X$, где t зависит от выбора доверительной вероятности. Пусть P = 0,997, тогда t = 3. Ситуационная модель, отражающая дефицит информации о среднем значении показания, представляет собой равномерный «закон распределения вероятности» $\overline{X}$ на интервале [$X_i - 3\sigma_X$; $X_i + 3\sigma_X$] со средним значением X_i и стандартной неопределенностью типа B

$$u_{\overline{X}} = \frac{3\sigma_X}{\sqrt{3}}.$$

Далее см. вариант 5. Вероятность того, что значение измеренной величины находится в пределах установленного интервала, равна произведению доверительной вероятности на выбранный уровень доверия.

Вариант 7. *Априорная информация*: отсчет, а следовательно, и показание подчиняются нормальному закону распределения вероятности со средним квадратическим отклонением $\sigma_x = \sigma_X$; значение мультипликативной поправки находится в пределах от θ_1 до θ_2.

Этот случай рассмотрим на примере.

Продолжение примера 15

В примере 15 коэффициент линейного расширения сплава α неизвестен. По справочным данным он может быть в пределах от 10^{-6} K^{-1} до 10^{-5} K^{-1}. В каких пределах находится значение измеренного линейного размера, если единственное значение отсчета x_i в условиях, рассмотренных в примере, оказалось равным 1, а из опыта предшествовавших измерений известно, что отсчет подчиняется нормальному закону распределения вероятности со средним квадратическим отклонением $2 \cdot 10^{-3}$?

Решение

1. Результат измерения (см. формулу (11)) $Q = \theta X$.

2. $\theta = 1 + \alpha(t - t_н) = 1 + 1000\alpha$. Отсутствие точных сведений об α можно учесть с помощью ситуационной модели, согласно которой мультипликативная поправка (поправочный множитель) с одинаковой вероятностью может иметь любое значение в пределах интервала $[1{,}001 \le \theta \le 1{,}01]$. Числовые характеристики этого «закона распределения вероятности»:
$$\bar{\theta} = 1{,}0055;$$
$$u_\theta = 2{,}6 \cdot 10^{-3}.$$
3. Среднее значение показания не может быть удалено от его единственного значения $X_i = 1$ м больше чем на $\pm t\sigma_X$, где t зависит от выбора доверительной вероятности. Пусть P = 0,997; тогда t = 3. Ситуационная модель, отражающая дефицит информации о среднем значении показания, представляет собой равномерный «закон распределения вероятности» $\bar{X}$ на интервале $[X_i - 3\sigma_X; X_i + 3\sigma_X]$ со средним значением $X_i = 1$ м и стандартной неопределенностью типа B
$$u_X = \frac{3\sigma_X}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{1{,}73} = 3{,}5 \cdot 10^{-3}\text{м}.$$
4. Среднее значение результата измерения
$$\bar{Q} = \bar{\theta} X_i = 1{,}0055 \cdot 1 \text{ м} = 1{,}0055 \text{ м}$$
имеет суммарную стандартную неопределенность, определяемую по формуле (22):
$$u_{\bar{Q}} = \sqrt{X_i^2 u_\theta^2 + \bar{\theta}^2 u_{X_i}^2} = \sqrt{1^2 \cdot (2{,}6 \cdot 10^{-3})^2 + 1{,}0055^2 \cdot (3{,}5 \cdot 10^{-3})^2} = 4{,}36 \cdot 10^{-3}\text{м},$$
и расширенную неопределенность $ku_{\bar{Q}}$, где, согласно Руководству ИСО, *по аналогии* с вероятностно-статистическими методами расчетов коэффициент охвата k выбирается равным 2...3. В теории вероятности и математической статистике таким значениям параметра t соответствует достаточно высокая *доверительная вероятность*. Измерительная информация в таком случае записывается в форме:
$$\boxed{Q = \bar{Q} - ku_{\bar{Q}} \ ... \ \bar{Q} + ku_{\bar{Q}} \text{ при коэффициенте охвата, равном k.}}$$
5. Значение измеренного линейного размера, отождествляемое со средним значением результата измерения,
$$Q = (982...1019) \text{ мм при коэффициенте охвата, равном 3.}$$

Приведем еще два примера.

Пример 53

Вольтамперметром М-11-08 класса точности 0,2 с входным сопротивлением $R_{вх} = 4$ кОм в диапазоне измерений (0...15) В измеряется падение напряжения на нагрузке R, величина которой установлена с помощью магазина сопротивления МСР-63 такой, как это показано на рис. 57. Схема электрических соединений приведена на рис. 58.

Каков интервал возможных значений измеряемого напряжения, если показание вольтамперметра $U_V = 8$ В?

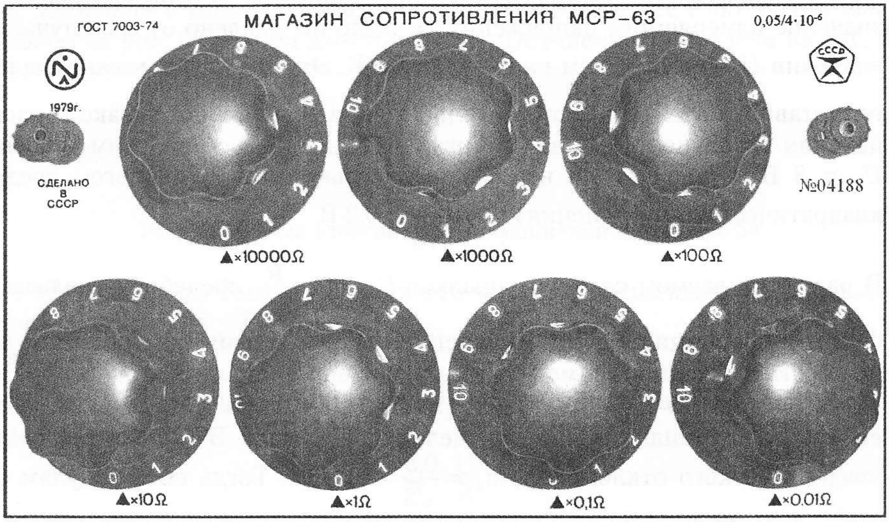


Рис. 57. Установка величины сопротивления нагрузки в примере 53

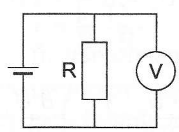


Рис. 58. Схема электрических соединений в примере 53

Решение

1. Падение напряжения на сопротивлении нагрузки R

$$U = I \cdot R.$$

2. Показание вольтметра, подключенного к сопротивлению нагрузки так, как это показано на рис. 58,

$$U_V = I\frac{R \cdot R_{вх}}{R + R_{вх}}.$$

3. Подставив выражение для силы электрического тока из этой формулы в предыдущую, получим следующее выражение для результата однократного измерения, который, согласно третьей аксиоме метрологии, является случайным:

$$U = U_V + U_V\frac{R}{R_{вх}} = U_V + U_п,$$

где $U_п$ — аддитивная поправка к случайному показанию вольтметра U_V.

4. Обычно для измерений выбирается вольтметр, входное сопротивление которого во много раз превышает сопротивление нагрузки. Тогда поправкой $U_п = U_V \frac{R}{R_{вх}}$ к показанию можно пренебречь. В этом случае неслучайное среднее значение показания $\overline{U}_V$, с которым при $U_п = 0$ отождествлялось бы значение измеряемого напряжения U, было бы удалено от его случайного значения U_V не более чем на $\frac{15 \cdot 0{,}2}{100} = 0{,}3$ В. Эту ситуацию можно было бы представить математической моделью в виде равномерного «закона распределения вероятности» U на интервале [7,7 ... 8,3] В со средним значением U_V = 8 В и стандартной неопределенностью типа В (аналогом среднего квадратического отклонения) $u_V = \frac{0{,}3}{\sqrt{3}} = 0{,}2$ В.
5. В рассматриваемом случае поправкой $U_п = U_V \frac{R}{R_{вх}}$ пренебречь нельзя. Дефицит информации о точном значении сопротивления R в числителе можно учесть ситуационной моделью в виде равномерного «закона распределения вероятности» R на интервале [999,5 ...1000,5] Ом со средним значением 1 кОм и стандартной неопределенностью типа В (аналогом среднего квадратического отклонения) $u_R = \frac{0{,}5}{\sqrt{3}} = 0{,}3$ Ом. Тогда по формулам (17), (22) получим:

$$\overline{U}_п = 8 \cdot \frac{1}{4} = 2\,\text{В},$$

где поправка на неточность вычислений

$$\theta_{U_п} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_п}{\partial U_V^2}u_V^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_п}{\partial R^2}u_R^2 = 0\,\text{В};$$

$$u_п = \sqrt{\left(\frac{R}{R_{вх}}u_V\right)^2 + \left(\frac{U_V}{R_{вх}}u_R\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}0{,}2\right)^2 + \left(\frac{8}{4 \cdot 10^3}0{,}3\right)^2} = 0{,}05\,\text{В}.$$

Вопрос о форме «закона распределения вероятности» поправки оставим открытым.
6. Внесение в показание аддитивной поправки трансформирует равномерный «закон распределения вероятности» U. Аналоги числовых характеристик композиции двух «законов распределения вероятности»:

$$\overline{U} = U_V + \overline{U}_п = 8 + 2 = 10\ \text{В};$$
$$u_U = \sqrt{u_V^2 + u_п^2} = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}05^2} = 0{,}2\ \text{В}.$$

7. Несмотря на то что вид «закона распределения вероятности» U неизвестен, можно с достаточной уверенностью утверждать, что значение измеряемого напряжения U находится в интервале $[\overline{U} - ku_U;\ \overline{U} + ku_U]$, где, согласно Руководству ИСО, k = 2 ... 3. Таким образом, например,

U = (9,6 ... 10,4) В при коэффициенте охвата, равном 2.

Пример 54

Амперметром Э 3257 класса точности 0,5 с внутренним сопротивлением $R_{вн}$ = 473 Ом в диапазоне измерений (0 ... 5) А измеряется сила постоянного электрического тока, протекающего через сопротивление R, величина которого установлена с помощью магазина сопротивления МСР-63 такой, как это показано на рис. 57. Схема электрических соединений приведена на рис. 59.

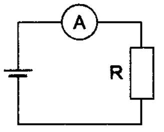


Рис. 59. Схема электрических соединений в примере 54

Чему равна сила тока, протекающего через сопротивление, если показание амперметра I_A = 3,8 А?

Решение

1. Сила постоянного электрического тока, протекающего через сопротивление R,

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{R}}.$$

2. Показание амперметра, включенного в электрическую цепь так, как это показано на рис. 59,

$$I = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{R} + \mathrm{R}_{вн}}.$$

3. Подставив выражение для электрического напряжения из этой формулы в предыдущую, получим следующее выражение для результата однократного измерения, который, согласно третьей аксиоме метрологии, является случайным:

$$I = I_A + I_A \frac{\mathrm{R}_{вн}}{\mathrm{R}} = I_A + I_п,$$

где $I_п$ — аддитивная поправка к случайному показанию амперметра I_A.

4. Обычно для измерений выбирается амперметр, внутреннее сопротивление которого во много раз меньше сопротивления R. Тогда поправкой $I_п = I_A \frac{\mathrm{R}_{вн}}{\mathrm{R}}$ к показанию прибора можно пренебречь. В этом случае неслучайное среднее значение показания $\bar{I}_A$, с которым при $I_п$ = 0 отождествлялось бы значение измеряемой силы постоянного электрического тока I, было бы удалено от его случайного значения I_A не более чем на $\frac{5 \cdot 0{,}5}{100}$ = 0,03 А. Эту ситуацию можно было бы представить математической моделью в виде равномерного «закона распределения вероятности» I на интервале [3,77 ... 3,83] А со средним значением I_A = 3,8 А и стандартной неопределенностью типа В (аналогом среднего квадратического отклонения) $u_A = \frac{0{,}03}{\sqrt{3}} = 0{,}02$ А.

5. В рассматриваемом случае поправкой $I_п = I_A \frac{R_{вн}}{R}$ пренебречь нельзя. Дефицит информации о точном значении сопротивления R в знаменателе можно учесть ситуационной моделью в виде равномерного «закона распределения вероятности» R на интервале [999,5 ... 1000,5] Ом со средним значением 1 кОм и стандартной неопределенностью типа B (аналогом среднего квадратического отклонения) $u_R = \frac{0{,}5}{\sqrt{3}} = 0{,}3$ Ом. Тогда по формулам (17), (22) получим:

$$\bar{I}_п = 3{,}8 \cdot \frac{473}{1000} = 1{,}8 \text{ A},$$

где поправкой на неточность вычислений $\theta_{I_п} = \frac{I_A R_{вн}}{R^3} u_R^2 = 1{,}6 \cdot 10^{-7}$ A можно пренебречь;

$$u_п = \sqrt{\left(\frac{R_{вн}}{R} u_A\right)^2 + \left(-\frac{I_A R_{вн}}{R^2} u_R\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{473}{1000} 0{,}02\right)^2 + \left(\frac{3{,}8 \cdot 473}{10^6} 0{,}3\right)^2} \approx 0{,}01 \text{ A}.$$

Вопрос о форме «закона распределения вероятности» поправки оставим открытым.

6. Внесение в показание аддитивной поправки трансформирует равномерный «закон распределения вероятности» I. Аналоги числовых характеристик композиции двух «законов распределения вероятности»:

$$\bar{I} = I_A + \bar{I}_п = 3{,}8 + 1{,}8 = 5{,}6 \text{ A};$$

$$u_I = \sqrt{u_A^2 + u_п^2} = \sqrt{0{,}02^2 + 0{,}01^2} \approx 0{,}02 \text{ A}.$$

7. Несмотря на то что вид «закона распределения вероятности» I неизвестен, можно с достаточной уверенностью утверждать, что значение измеряемой силы постоянного электрического тока I находится в интервале $[\bar{I} - ku_I;\ \bar{I} + ku_I]$, где, согласно Руководству ИСО, k = 2 ... 3. Таким образом, например,

$$I = (5{,}5 \ldots 5{,}7) \text{ A при коэффициенте охвата, равном 3.}$$

Рассмотренными вариантами и примерами не исчерпываются, конечно, все возможные ситуации. Они лишь иллюстрируют методологию решения задач, встречающихся на практике.

Важное замечание

Последние примеры позволяют коснуться *правила округления*. В метрологии принято среднее квадратическое отклонение или его аналог выражать одной значащей цифрой, например 8; 0,5; 0,007. Две значащие цифры, например 27, 0,016, удерживаются при особо точных измерениях и в тех случаях, когда значащая цифра старшего разряда меньше 4 (в промежуточных вычислениях сохраняется на одну значащую цифру больше). Вследствие этого при квадратичном суммировании

$$u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

любым из слагаемых u_i под радикалом можно пренебречь, если его учет почти не меняет u. Строго говоря, u при этом может уменьшиться до u′, но так как значение u выражается не более чем двумя значащими цифрами, то условие можно считать выполненным, если $u - u' < 0{,}05u$, откуда $0{,}95u < u'$. Возводя обе части неравенства в квадрат и принимая во внимание, что $(u')^2 = u^2 - u_i^2$ получим

$$0{,}9025u^2 < u^2 - u_i^2;$$
$$u_i^2 < 0{,}0975u^2;$$
$$u_i < 0{,}312u.$$

Таким образом, **слагаемым**

$$u_i \le \frac{1}{3}u \qquad (30)$$

всегда можно пренебречь.

При выполнении измерений никто не застрахован от ошибок. Может оказаться ошибочным и единственное значение отсчета x_i при однократном измерении. Во избежание такой ошибки однократное измерение рекомендуется 2–3 раза повторить без совместной обработки полученных результатов.

Глава 6
Многократное измерение

6.1. Многократное измерение по шкале порядка. Основы теории выборочного статистического контроля

Многократное измерение выполняется с целью накопления и эффективного использования *апостериорной информации* для повышения качества результата измерения.

Например, если при многократном повторении измерительной процедуры после учета всех поправок в 85 % случаев принималось решение $Q_I < Q_J$, а в 15 % случаев – решение $Q_I \geq Q_J$, то за результат многократного измерения есть основание принять решение:

$$Q_I < Q_J \text{ с вероятностью } 0{,}85.$$

Особым случаем, когда по результатам многократного повторения измерительной процедуры (она называется в этом случае *контрольно-измерительной операцией*) принимается специфическое решение, является *выборочный статистический контроль*. Он применяется тогда, когда *сплошной контроль* качества изделий при их поставке или серийном производстве невозможен либо экономически нецелесообразен.

При выборочном статистическом контроле из партии (часто называемой *генеральной совокупностью*) изделий выбирается незначительное их число (делается *выборка*) и по результатам контроля качества изделий, попавших в выборку, принимается решение о качестве генеральной совокупности в целом.

Для того чтобы выборка правильно отражала свойства генеральной совокупности, к ней предъявляются следующие требования:

1. Выборка должна быть *случайной*.
2. Выборка должна быть определенного *объема* (под объемом понимается число изделий в выборке).
3. Должно быть установлено *допустимое число бракованных изделий в выборке*, при котором генеральная совокупность еще будет признаваться годной.

Удовлетворяющая перечисленным требованиям выборка называется представительной, или *репрезентативной.*

Случайный отбор изделий из генеральной совокупности обеспечивается специальной процедурой. Если изделия могут быть пронумерованы, то чаще всего это делается с помощью генератора случайных чисел по стандартной компьютерной программе.

После поочередного контроля каждого изделия, попавшего в выборку, оно может либо возвращаться, либо не возвращаться обратно в генеральную совокупность. Соответствующие выборки называются *с возвратом* или *без возврата.* **При выборке с возвратом** число бракованных изделий x в выборке объемом n подчиняется *биномиальному закону распределения вероятности,* **при выборке без возврата** — *гипергеометрическому.* Распространенной моделью закона распределения вероятности x служит *распределение Пуассона,* к которому биномиальное распределение стремится при $n \to \infty$ (на практике используется условие $n \geq 60$) и которым часто заменяют гипергеометрическое распределение при объеме генеральной совокупности $N \to \infty$ (см. табл. 6).

В качестве иллюстрации на рис. 60 показаны законы распределения вероятности числа бракованных изделий в выборках из заведомо годной и заведомо бракованной партий. Максимальная доля бракованных изделий в партии, которая еще может признаваться годной, составляет P′. Минимальная доля бракованных изделий в партии, которая уже должна признаваться бракованной, обозначена P″. Выраженные в процентах, значения P′ и P″ называются *приемочным* и *браковочным уровнями дефектности* и обозначаются соответственно AQL[1] и LQ.

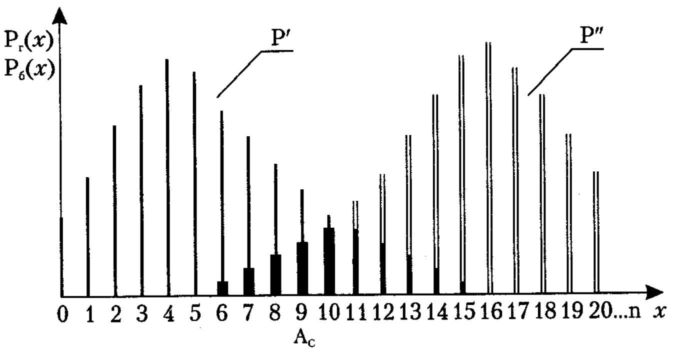


Рис. 60. Законы распределения вероятности числа бракованных изделий в выборках из годной и бракованной генеральных совокупностей

Правило принятия решения формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} \text{при } x \leq A_c \text{ партия изделий принимается;} \\ \text{при } x > A_c \text{ партия изделий бракуется,} \end{cases}$$

[1] От англ. *accept* — принимать; *quality* — качество; *level* — уровень.

где A_c называется *приемочным числом*. В результате *ошибки I рода* может оказаться забракованной партия изделий, которую следовало бы принять. В результате *ошибки II рода* может быть принята партия изделий, которую следовало бы забраковать.

Условная вероятность ошибки I рода

$$\alpha = \sum_{x=A_c+1}^{n} P_г(x_i) = 1 - F(A_c, n, P'),$$

условная вероятность ошибки II рода

$$\beta = \sum_{x=0}^{A_c} P_б(x_i) = F(A_c, n, P''),$$

где для общности рассуждений F будем считать *функцией распределения вероятности Пуассона.*

Увеличение приемочного числа A_c, приводящее к уменьшению α, увеличивает β, и наоборот. Следовательно, выбор значения A_c должен быть *оптимальным,* удовлетворяющим противоречивым требованиям. Определение объема выборки n и приемочного числа A_c, исходя из требований к качеству продукции (P'; P'') и качеству принимаемого решения (α; β), называется составлением *плана выборочного статистического контроля.*

Процедура составления плана контроля при согласованных значениях P', P'', α и β сводится к решению системы из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} F(n,\ A_c,\ P') = 1 - \alpha; \\ F(n,\ A_c,\ P'') = \beta. \end{cases}$$

Уравнения являются трансцендентными и не имеют аналитического решения. Поэтому для решения этой системы уравнений может быть использован *графоаналитический метод,* сущность которого заключается в следующем (см. рис. 61).

В координатах (A_c, n) строится линия AQL, соответствующая первому уравнению. Для этого может использоваться вспомогательная табл. 16.

Затем, с использованием этой же таблицы, строится линия LQ, соответствующая второму уравнению. Точка пересечения этих линий будет соответствовать решению системы уравнений. Она однозначно определяет *план контроля*: приемочное число A_c и объем выборки n.

Пример 55

При выборочном статистическом контроле качества продукции, поставляемой крупными партиями, между поставщиком и заказчиком достигнуто соглашение о следующих требованиях к качеству товара:

$$AQL = 10\,\%;$$
$$LQ = 50\,\%.$$

Согласованные требования к качеству решений, принимаемых при выборочном статистическом контроле, сформулированы следующим образом:

$$\alpha = 0{,}05;$$
$$\beta = 0{,}01.$$

Составить план контроля на согласованных условиях.

Решение

1. Используя столбец в табл. 16, соответствующий $F = 1 - \alpha = 0{,}95$, при $P = P' = 0{,}1$ получим

A_c	3	4	5	6	7
n	13,66	19,70	26,13	32,85	39,80

По этим данным на рис. 61 построена линия AQL.

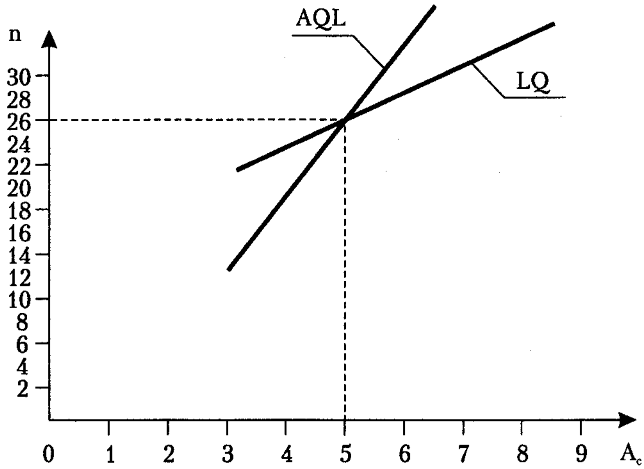


Рис. 61. Составление плана выборочного статистического контроля в примере 55

2. Используя столбец той же таблицы, соответствующий $F = \beta = 0{,}01$, при $P = P'' = 0{,}5$ получим:

A_c	3	4	5	6	7
n	20,09	23,20	26,22	29,14	32,00

По этим данным на рис. 61 построена линия LQ.

3. План контроля на согласованных условиях:
   - ❑ объем выборки 26;
   - ❑ приемочное число 5.

Последовательность действий при выборочном контроле показана на рис. 62. На основании анализа априорной информации и исходных данных

Таблица 16. Вспомогательная таблица значений nP

A_c\F	0,995	0,99	0,975	0,95	0,9	0,75	0,5	0,25	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005	0,0001
1	0,10350	0,14855	0,24221	0,35536	0,53181	0,96127	1,67835	2,69263	3,88972	4,74386	5,57165	6,63835	7,43010	9,2335	9,9985	11,7565
2	0,33786	0,43542	0,61867	0,81769	1,10206	1,72730	2,67406	3,92040	5,32230	6,29580	7,22470	8,40595	9,27380	11,2290	12,0515	13,9280
3	0,67221	0,82324	1,08986	1,36632	1,74477	2,53532	3,67206	5,10940	6,68080	7,75365	8,76730	10,04510	10,97750	13,0625	13,9340	15,9140
4	1,07792	1,27910	1,62348	1,97015	2,43259	3,36860	4,67091	6,27445	7,99355	9,15350	10,24155	11,60465	12,59410	14,7940	15,7100	17,7820
5	1,53691	1,78528	2,20189	2,61301	3,15190	4,21921	5,67015	7,42270	9,27470	10,51305	11,66835	13,10850	14,14975	16,4545	17,4105	19,5670
6	2,03734	2,33021	2,81436	3,28531	3,89476	5,08265	6,66965	8,55850	10,53210	11,84240	13,05950	14,57065	15,65965	18,0615	19,0545	21,2895
7	2,57112	2,90610	3,45383	3,98082	4,65611	5,95610	7,66925	9,68440	11,77090	13,14810	14,42270	15,99995	17,13360	19,6260	20,6540	22,9625
8	3,13240	3,50745	4,11537	4,69523	5,43245	6,83765	8,66895	10,80245	12,99470	14,43465	15,76320	17,40265	18,57820	21,1560	22,2170	24,5945
9	3,71693	4,13020	4,79541	5,42540	6,22130	7,72590	9,66870	11,91385	14,20600	15,70520	17,08480	18,78310	19,99840	22,6575	23,7490	26,1930
10	4,32136	4,77124	5,49115	6,16900	7,02075	8,61980	10,66850	13,01965	15,40665	16,96220	18,39035	20,14470	21,39780	24,1340	25,2522	27,7625
11	4,94311	5,42820	6,20055	6,92420	7,82935	9,51860	11,66835	14,12060	16,59815	18,20755	19,68205	21,48990	22,77925	25,5895	26,7395	29,3065
12	5,58015	6,09905	6,92195	7,68955	8,64595	10,42170	12,66820	15,21725	17,78155	19,44260	20,96160	22,82085	24,14495	27,0260	28,2035	30,8285
13	6,23065	6,78240	7,65395	8,46395	9,46960	11,32860	13,66815	16,31025	18,95795	20,66860	22,23035	24,13910	25,49665	28,4460	29,6500	32,3310
14	6,89335	7,47675	8,39540	9,24630	10,29960	12,23880	14,66800	17,39990	20,12800	21,88645	23,48950	25,44610	26,83600	29,8515	31,0810	33,8165
19	10,35325	11,08215	12,21655	13,25465	14,52525	16,83015	19,66770	22,80800	25,90250	27,87925	29,67085	31,84535	33,38295	36,7010	38,0475	41,0310
24	13,99535	14,85335	16,17870	17,38210	18,84430	21,47105	24,66745	28,16680	31,58355	33,75240	35,71010	38,07695	39,74500	43,3305	44,7800	47,9845
29	17,76730	18,74240	20,24085	21,59395	23,22945	26,14690	29,66735	33,49070	37,19850	39,54095	41,64880	44,18970	45,97585	49,8035	51,3475	54,7515
34	21,63760	22,72090	24,37880	25,86965	27,66450	30,84915	34,66720	38,78830	42,76355	45,26580	47,51155	50,21250	52,10750	56,1585	57,7890	61,3775
39	25,58600	26,77000	28,57660	30,19575	32,13890	35,57225	39,66715	44,06515	48,28910	50,93950	53,31450	56,16450	58,16050	62,4195	64,1305	67,8915
44	29,59815	30,87705	32,82330	34,56300	36,64560	40,31235	44,66710	49,32495	53,78250	56,57250	59,06800	62,05800	64,14950	68,6040	70,3910	74,3135
49	33,66380	35,03240	37,11095	38,96475	41,17905	45,06660	49,66705	54,57050	59,24900	62,17100	64,78050	67,90350	70,08450	74,7245	76,5835	80,6595

относительно P′, P″, α и β составляется план контроля. После этого в результате n-кратного повторения контрольно-измерительной операции устанавливается число бракованных изделий в выборке x. На основании сравнения x с приемочным числом A_c выносится решение относительно всей партии изделий.

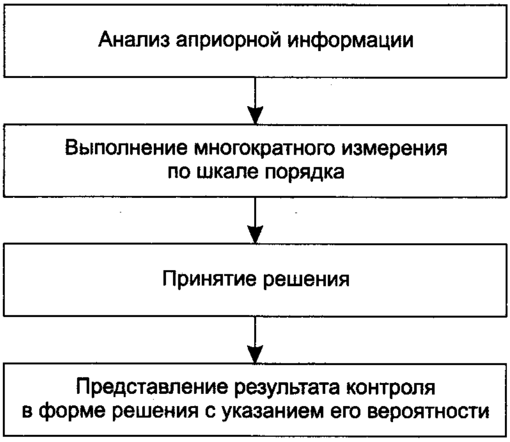


Рис. 62. Последовательность действий при выборочном статистическом контроле

Если перед началом выборочного контроля вероятность того, что партия изделий является годной, равна $P_г$, а вероятность того, что она бракованная, — $P_б$, то при вынесении решения безусловная *вероятность ошибки I рода* по правилу умножения вероятностей

$$P_I = \alpha P_Г,$$

а безусловная *вероятность ошибки II рода*

$$P_{II} = \beta P_б.$$

При $x \le A_c$ решение принять партию изделий является правильным с вероятностью $1 - P_I$. При $x > A_c$ решение признать партию бракованной является правильным с вероятностью $1 - P_{II}$.

6.2. Многократное измерение по градуированным шкалам

Многократное измерение одной и той же величины постоянного размера выполняется при повышенных требованиях к точности измерений. Такие измерения характерны для профессиональной метрологической деятельности и выполняются в основном сотрудниками метрологических служб, а также при тонких научных экспериментах. Это сложные, трудоемкие и дорогостоящие измерения, целесообразность которых должна быть всегда убедительно обоснована. Один из создателей теорий информации Л. Бриллюэн в статье «Теория информации и ее приложение к фундаментальным проблемам физики» привел слова Д. Габора о том, что «ничто не дается даром, в том числе информация». Это в полной мере относится и к измерительной информации.

Способы накопления (формирования массива) экспериментальных данных рассмотрены в п. 4.2 и показаны на рис. 63.

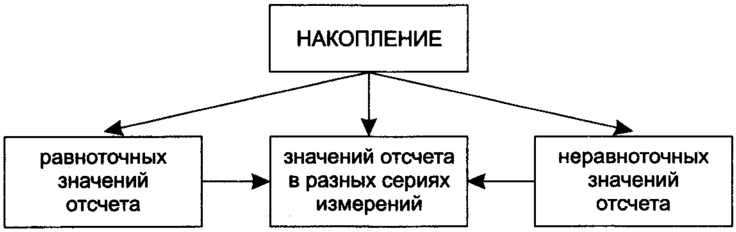


Рис. 63. Способы формирования массива экспериментальных данных

Соответственно можно выделить три разновидности многократного измерения.

6.2.1. Многократное измерение с равноточными значениями отсчета

Результатом многократного измерения с равноточными значениями отсчета является *среднее арифметическое* n отдельных независимых значений результата измерения, составляющих массив экспериментальных данных:

$$\boxed{\hat{Q}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Q_i.}$$

Оно является *оценкой* среднего значения результата измерения, получение которого на практике невозможно из-за ограниченного объема экспериментальных данных.

Дисперсия среднего арифметического

$$\boxed{\sigma^2_{\hat{Q}_n} = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Q_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(Q) = \frac{n\sigma_Q^2}{n^2} = \frac{\sigma_Q^2}{n}} \qquad (31)$$

в n раз меньше дисперсии результата измерения σ_Q^2. Это фундаментальное положение лежит в основе широко применяющихся во многих областях науки и техники методов накопления, усреднения, уменьшения разброса, сглаживания экспериментальных данных.

Соответственно *стандартное отклонение*, или *стандартная неопределенность типа А результата многократного измерения*, согласно формуле (31),

$$\boxed{S_{\hat{Q}_n} = \frac{S_Q}{\sqrt{n}},} \qquad (32)$$

то есть в $\sqrt{n}$ раз меньше стандартной неопределенности типа А результата однократного измерения.

Последовательность действий при выполнении многократного измерения с равноточными значениями отсчета показана на рис. 64.

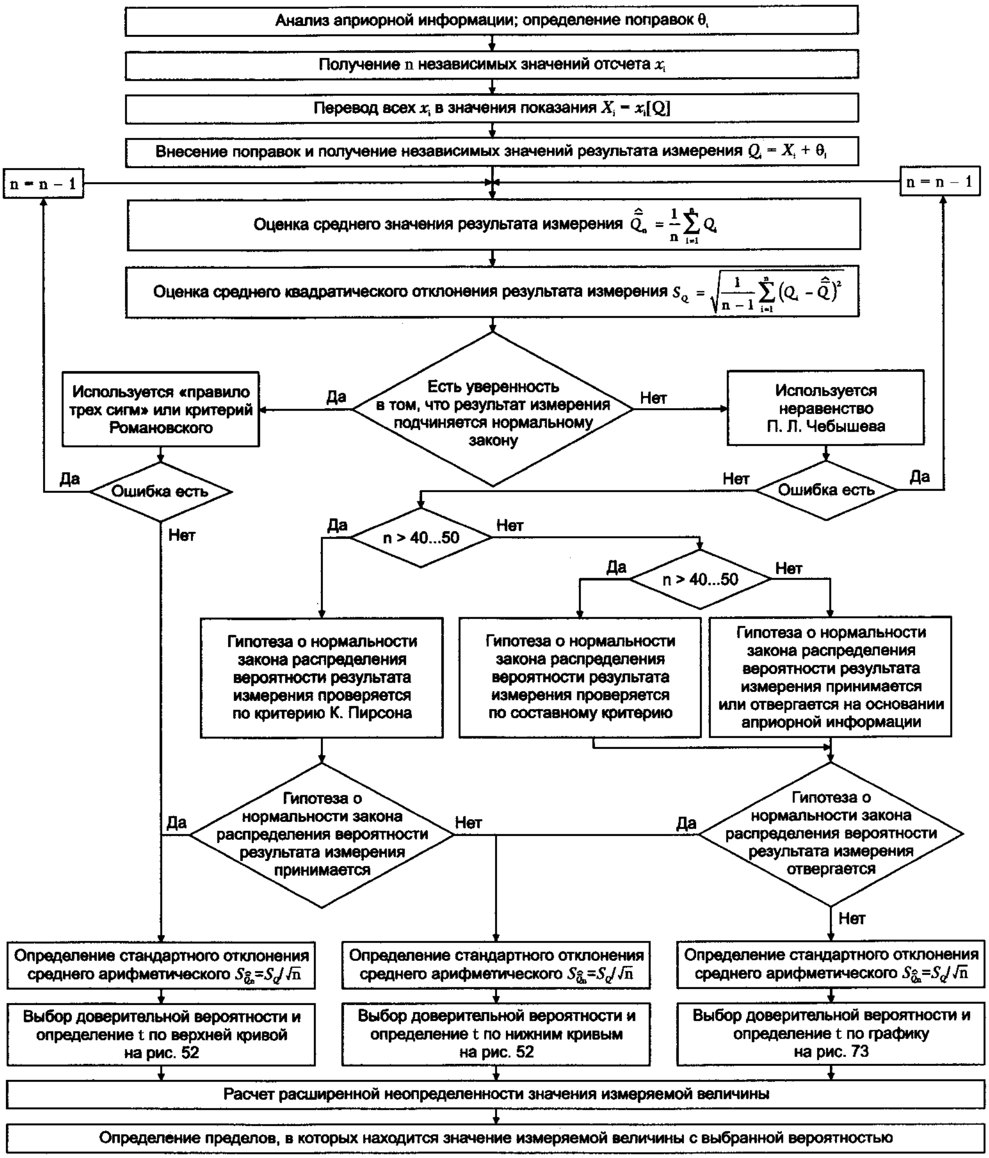


Рис. 64. Порядок выполнения многократного измерения с равноточными значениями отсчета

При *анализе априорной информации* рассматриваются условия, в которых будет проводиться измерение. Если измерение будет выполняться в рабочих условиях, то определяются значения поправок, которые нужно будет вносить в показание. Устанавливается, есть ли основания считать, что результат измерения будет подчиняться нормальному закону распределения вероятности, или таких оснований нет. После этого выполняется *основная измерительная процедура*: получение в одних и тех же условиях, тем же оператором и с помощью одного и того же средства измерений n независимых значений отсчета. Если отсчетное устройство измерительного прибора не проградуировано в значениях измеряемой величины, то с помощью градуировочной характеристики все *значения отсчета переводятся в значения показания*, после чего, при необходимости, в них вносятся *поправки*, которые могут отличаться одна от другой из-за изменения во времени влияющих факторов. Для простоты будем считать их аддитивными и известными точно.

Надежность эргономической системы, в которую входят человек, окружающая среда, объект измерений и средство измерений, не безгранична. В ней могут происходить сбои, отказы аппаратуры, скачки напряжения в сети питания, сейсмические сотрясения, отвлечение внимания оператора, описки в записях и многое другое, не имеющее отношения к измерениям. В результате появляются *ошибки*, вероятность которых, как следует из теории надежности больших систем, не так уж мала.

При многократном измерении одной и той же величины постоянного размера ошибки проявляются в том, что отдельные значения в массиве экспериментальных данных заметно отличаются от остальных. Иногда это отличие настолько большое, что ошибка очевидна. Остается понять и устранить ее причину или просто отбросить это значение как заведомо неверное. Если отличие незначительное, то оно может быть следствием как ошибки, так и рассеяния отсчета, а следовательно, показания и результата измерения, которые, согласно третьей аксиоме метрологии, являются случайными. Нужно поэтому иметь какое-то правило, руководствуясь которым принимать решения в сомнительных случаях.

Обнаружение и исключение ошибок

Если результат измерения подчиняется нормальному закону распределения вероятности, то все его случайные значения Q_i с вероятностью 0,997 концентрируются в окрестности среднего значения $\overline{Q} \pm 3\sigma_Q$, и появление какого-нибудь отдельного значения за пределами интервала $[\overline{Q} - 3\sigma_Q; \overline{Q} + 3\sigma_Q]$ с большой уверенностью можно рассматривать как следствие ошибки. Такое значение должно быть исключено из массива экспериментальных данных. Это правило называется «*правилом трех сигм*». На практике вместо числовых характеристик закона распределения вероятности результата измерения используются их точечные оценки. Если оказывается, что сомнительное значение Q_i отличается от среднего арифметического $\hat{\overline{Q}}_n$ больше чем на $3S_Q$, то такое значение отбрасывается. После этого $\hat{\overline{Q}}_n$ и S_Q рассчитываются заново и проверяется следующее сомнительное значение, если таковое окажется. Если нет, то исключение ошибок на этом заканчивается.

Пример 56

Пятнадцать независимых числовых значений результата измерения температуры в помещении по шкале Цельсия приведены во второй графе табл. 17. Согласно априорной информации, результат измерения подчиняется нормальному закону распределения вероятности. Нет ли ошибок в экспериментальных данных?

Таблица 17

i	t_i	$t_i - \hat{\bar{t}}_{15}$	$(t_i - \hat{\bar{t}}_{15})^2$	$t_i - \hat{\bar{t}}_{14}$	$(t_i - \hat{\bar{t}}_{14})^2$
1	20,42	+0,016	0,000256	+0,009	0,000081
2	43	+0,026	676	+0,019	361
3	40	−0,004	016	−0,011	121
4	43	+0,026	676	+0,019	361
5	42	+0,016	256	+0,009	081
6	43	+0,026	676	+0,019	361
7	39	−0,014	196	−0,021	441
8	30	−0,104	10816	—	—
9	40	−0,004	016	−0,011	121
10	43	+0,026	676	+0,019	361
11	42	+0,016	256	+0,009	081
12	41	+0,006	036	−0,001	001
13	39	−0,014	196	−0,021	441
14	39	−0,014	196	−0,021	441
15	40	−0,004	016	−0,011	121

Решение

1. Среднее арифметическое значение результата измерения

$$\hat{\bar{t}}_{15} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i = 20{,}404.$$

2. Необходимые для определения стандартного отклонения результата измерения вспомогательные вычисления сведены в третью и четвертую графы табл. 17.

$$S_t = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \hat{\bar{t}}_{15}\right)^2} = 0{,}033.$$

3. Больше чем на $3S_t = 0{,}099$ от среднего арифметического отличается восьмое значение. Следовательно, его можно считать ошибочным, и оно должно быть отброшено.

4. Без восьмого значения[1]

$$\hat{\bar{t}}_{14} = 20{,}411.$$

[1] При вычислении среднего арифметического часто приходится уменьшать или увеличивать число слагаемых. Для того чтобы не повторять всю процедуру суммирования и не перегружать память вычислительных устройств, удобно пользоваться формулой

$$\hat{\bar{Q}}_{n\pm1} = \frac{1}{n\pm1}\left(n\hat{\bar{Q}}_n \pm Q_j\right)$$

5. Результаты вспомогательных вычислений при повторном определении стандартного отклонения сведены в пятую и шестую графы табл. 17.

$$S_t = 0{,}016.$$

6. Ни одно из оставшихся значений t_i, не отличается теперь от среднего арифметического больше чем на $3S_t = 0{,}048$. Можно, следовательно, считать, что среди них нет ошибочных.

При небольших массивах экспериментальных данных среднее арифметическое подчиняется закону распределения вероятности Стьюдента (псевдоним В. С. Госсета). В этом случае нужно пользоваться критерием Романовского, согласно которому отбрасывается сомнительное значение результата измерения, отличающееся от среднего арифметического $\hat{Q}_n$ больше чем на tS_Q, где t выбирается из табл. 18.

Таблица 18. Значения коэффициента Стьюдента t

n	P												
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	0,16	0,33	0,51	0,73	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
3	0,14	0,29	0,45	0,62	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9	31,6
4	0,14	0,28	0,42	0,58	0,77	0,89	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5	0,13	0,27	0,41	0,57	0,74	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,6
6	0,13	0,27	0,41	0,56	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
7	0,13	0,27	0,40	0,55	0,72	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
8	0,13	0,26	0,40	0,55	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
9	0,13	0,26	0,40	0,54	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0
10	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3	4,8
11	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,2	2,8	3,2	4,6
12	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,5
13	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,3
14	0,13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,0	4,2
15	0,13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	3,0	4,1
16	0,13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	4,0
17	0,13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	4,0
18	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	4,0
19	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	3,9
20	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	3,9
21	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
22	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
23	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
24	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
25	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7

n	P												
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
26	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
27	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
28	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,86	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
29	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,86	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
30	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
40	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,6
60	0,13	0,25	0,39	0,53	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,5
120	0,13	0,25	0,39	0,53	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,6	3,4
∞	0,13	0,25	0,39	0,52	0,67	0,84	1,0	1,3	1,6	2,0	2,3	2,6	3,3

Если нет уверенности в том, что результат измерения подчиняется нормальному закону распределения вероятности, то для обнаружения и исключения ошибок можно воспользоваться неравенством П. Л.Чебышева. Задавшись доверительной вероятностью P, по нижней кривой на рис. 52 следует найти параметр t, показывающий самое большое количество σ_Q, на которое случайные значения результата измерения могут отличаться от его среднего значения. Далее вместо числовых характеристик закона распределения вероятности результата измерения используются их точечные оценки. Если оказывается, что сомнительное значение Q_i отличается от среднего арифметического $\hat{Q}_n$ больше чем на tS_Q, то такое значение отбрасывается. После этого $\hat{Q}_n$ и S_Q рассчитываются заново и проверяется следующее сомнительное значение, если таковое окажется. Если нет, то исключение ошибок на этом заканчивается.

При использовании неравенства П. Л. Чебышева доверительная вероятность не выбирается столь же высокой, как в случае применения «правила трех сигм». Как следует из нижнего графика на рис. 52, доверительный интервал будет тогда слишком широким. Уже при P = 0,94 t ≈ 4, то есть можно сказать, что действует «правило четырех сигм». Если из априорной информации следует, что результат измерения подчиняется симметричному закону распределения вероятности, то на рис. 52 можно пользоваться средней (пунктирной) кривой. В этом случае «правилу трех сигм» соответствует доверительная вероятность P = 0,95.

После проверки того, нет ли в массиве экспериментальных данных ошибок, и исключения их в случае необходимости, следует все-таки решить вопрос о том, подчиняется или нет результат измерения нормальному закону распределения вероятности.

Проверка нормальности закона распределения вероятности результата измерения

Для проверки нормальности закона распределения вероятности результата измерения нужно построить *гистограмму*, являющуюся эмпирической плотностью вероятности результата измерения (см. п. 4.3.2). Иногда по виду гистограммы можно с большой уверенностью заключить, подчиняется или нет результат измерения нормальному закону распределения вероятности. Если, например, гистограмма имеет вид, показанный на рис. 65, *а*, то результат измерения определенно не подчиняется нормальному закону. Если же гистограмма имеет вид, показанный на рис. 65, *б*, то возникает вопрос: достаточно ли хорошо она соответствует теоретической кривой плотности вероятности нормального закона распределения, показанной сплошной линией? Для разрешения этого сомнения нужно иметь правило, руководствуясь которым можно было бы принимать то или иное решение.

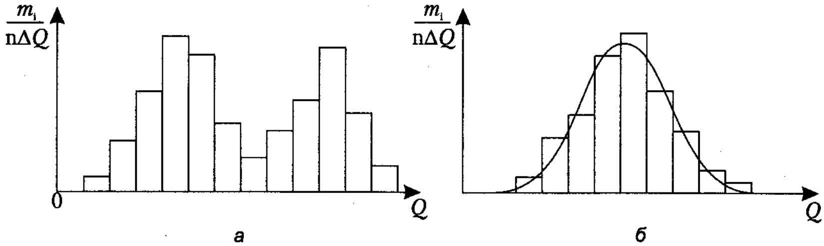


Рис. 65. Гистограммы, построенные по экспериментальным данным

Вид гистограммы не всегда правильно отражает характер закона распределения вероятности. В табл. 19, например, приведен массив числовых значений результата измерения, который на рис. 66 и 67 представлен двумя гистограммами.

Таблица 19

60,3	60,5	61,1	60,7	61,3	60,4	61,4	61,4	61,5	61,6
60,7	61,5	61,3	61,5	60,6	60,7	61,3	60,5	60,4	62,0
60,0	61,3	61,7	60,5	60,7	61,6	61,6	61,4	61,5	61,5
60,9	60,3	60,6	60,7	60,7	61,9	61,7	60,7	61,5	61,9
61,1	61,6	60,1	61,3	61,5	60,5	60,5	60,8	61,8	60,4
60,5	60,7	61,4	61,6	60,9	61,3	61,5	60,6	60,6	61,9
61,3	60,9	60,7	60,6	60,8	60,6	60,1	61,0	61,6	61,5
61,4	61,6	60,6	61,0	60,5	60,7	61,5	60,8	61,7	60,5
60,7	61,7	60,8	60,8	61,2	61,3	60,3	60,6	60,5	62,0
60,9	61,4	61,5	60,3	61,4	60,6	61,5	60,8	60,5	61,6

На рис. 66, соответствующем табл. 20, ось абсцисс разбита на 10 интервалов шириной ΔQ = 0,2 каждый, а на рис. 67, соответствующем табл. 21, — на 4 интервала шириной ΔQ = 0,5. По виду гистограммы на рис. 66 можно предположить, что результат измерения подчиняется двухмодальному закону распределения вероятности, а по гистограмме на рис. 67 — одномодальному[1].

[1] При группировке данных по интервалам значения, попадающие на границу интервала, отнесены к группе меньших значений.

Таблица 20

Интервалы	m_i	m_i / nΔQ
60,0...60,2	3	0,15
60,2...60,4	7	0,35
60,4...60,6	19	0,95
60,6...60,8	17	0,85
60,8...61,0	6	0,3
61,0...61,2	3	0,15
61,2...61,4	15	0,75
61,4...61,6	20	1,00
61,6...61,8	5	0,25
61,8...62,0	5	0,25

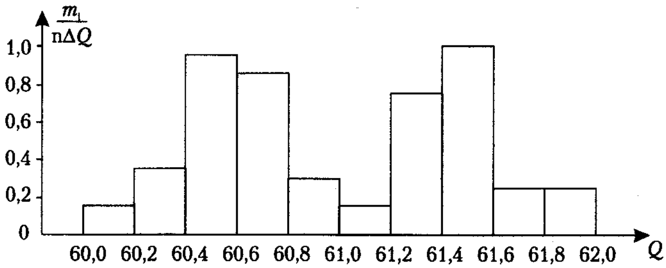


Рис. 66. Гистограмма, построенная по данным табл. 20

Таблица 21

Интервалы	m_i	m_i / nΔQ
60,0...60,5	20	0,40
60,5...61,0	32	0,64
61,0...61,5	30	0,60
61,5...62,0	18	0,36

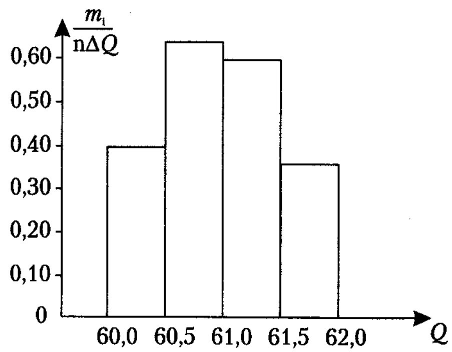


Рис. 67. Гистограмма, построенная по данным табл. 21

В качестве второго примера, в табл. 22 приведен массив числовых значений результата измерения, который представлен гистограммами на рис. 68 и 69.

Таблица 22

5,11	8,32	7,23	5,89	8,35	6,69	8,90	6,68	8,28	7,26
7,22	8,92	5,73	9,45	5,12	9,50	5,15	9,56	5,72	5,87
7,30	6,57	8,37	9,91	7,39	6,65	8,97	6,72	9,73	8,30
6,62	5,47	9,22	6,64	9,59	9,76	6,75	8,45	5,88	8,99
5,90	7,84	8,47	9,05	7,16	5,23	5,02	7,19	8,57	7,45
6,52	7,85	6,05	5,74	9,68	9,62	8,48	7,85	7,49	5,75
5,42	6,64	7,34	9,12	5,43	6,39	5,23	6,85	7,94	8,52
7,15	5,12	8,04	5,17	9,80	7,20	9,26	7,52	6,10	7,17
8,32	8,40	7,21	9,29	9,79	6,64	7,58	8,79	8,11	8,72
6,61	6,66	9,19	7,62	8,88	8,17	6,55	9,23	7,77	6,08

Таблица 23

Интервалы	m_i	$m_i / n\Delta Q$
5,00...5,56	11	0,20
5,56...6,12	11	0,20
6,12...6,68	12	0,21
6,68...7,24	12	0,21
7,24...7,80	10	0,18
7,80...8,36	12	0,21
8,36...8,92	12	0,21
8,92...9,48	10	0,18
9,48...10,04	10	0,18

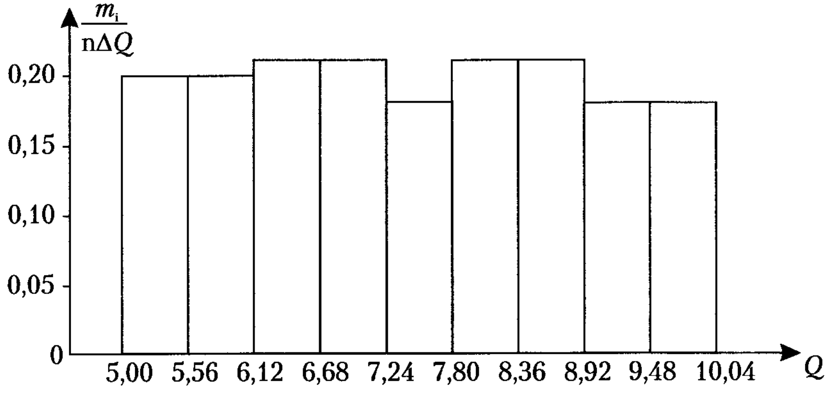


Рис. 68. Гистограмма, построенная по данным табл. 23

Таблица 24

Интервалы	m_i	m_i / nΔQ
5,00...5,72	12	0,17
5,72...6,44	11	0,15
6,44...7,16	16	0,22
7,16...7,88	20	0,28
7,88...8,60	16	0,22
8,60...9,32	14	0,19
9,32...10,04	11	0,15

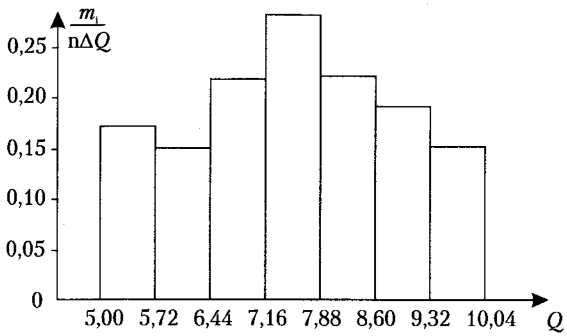


Рис. 69. Гистограмма, построенная по данным табл. 24

На рис. 68 ось абсцисс разбита на 9 интервалов, а на рис. 69 — на 7. По виду гистограммы на рис. 68 можно предположить, что результат измерения подчиняется равномерному закону распределения вероятности, а по гистограмме на рис. 69 — одномодальному.

Для правильного отображения гистограммой характера закона распределения вероятности нужно соблюдать следующие правила при ее построении:

1. Интервалы ΔQ, на которые разбивается ось абсцисс, следует выбирать по возможности одинаковыми.
2. Число интервалов k устанавливать в соответствии со следующими рекомендациями:

Число значений результата измерения	Рекомендуемое число интервалов
40–100	7–9
100–500	8–12
500–1000	10–16
1000–10000	12–22

3. Масштаб выбирать таким, чтобы высота гистограммы относилась к ее основанию примерно как 5 : 8.

Если по виду гистограммы можно предположить, что результат измерения подчиняется нормальному закону распределения вероятности, то правдоподобие этой гипотезы следует проверить. Существует несколько так называемых *критериев согласия*, по которым проверяются гипотезы о соответствии экспериментальных данных тому или иному закону распределения вероятности. При количестве независимых значений результата измерения $n > 40 \dots 50$ наиболее распространенным из них является *критерий К. Пирсона.* При использовании этого критерия за меру расхождения экспериментальных данных с теоретическим законом распределения вероятности принимается сумма квадратов отклонения *частостей* m_i / n от теоретической вероятности P_i попадания отдельного значения результата измерения в i-й интервал, причем каждое слагаемое берется с весовым коэффициентом n / P_i:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{P_i} \left(\frac{m_i}{n} - P_i \right).$$

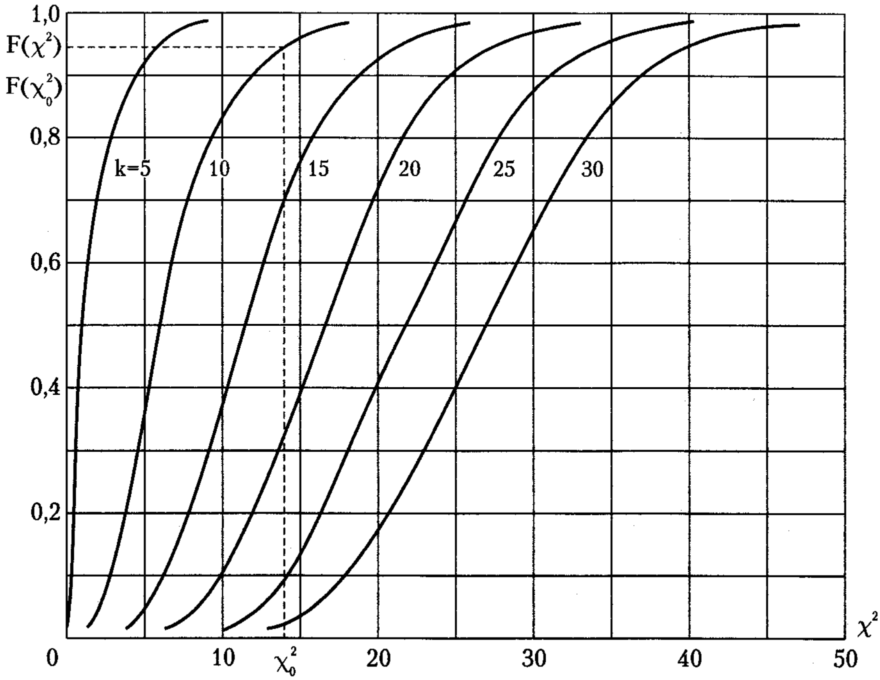


Рис. 70. Интегральная функция распределения вероятности К. Пирсона

Если расхождение случайно, то χ^2 подчиняется χ^2-распределению (хи-квадрат распределению К. Пирсона). Кривые интегральной функции этого распределения представлены на рис. 70[1]. Интегральная функция определяет вероят-

[1] Здесь k соответствует числу интервалов только при проверке соответствия закона распределения вероятности результата измерения именно нормальному закону.

ность того, что случайное число примет значение, меньшее аргумента этой функции. Поэтому, задавшись значением интегральной функции распределения К. Пирсона F (χ_0^2), можно проверить, больше или меньше ее аргумента χ_0^2 (см. рис. 70) вычисленное значение χ^2. Если меньше или равно, то с выбранной вероятностью χ^2 можно считать **случайным числом**, подчиняющимся χ^2-распределению К. Пирсона, то есть гипотеза о соответствии эмпирического закона распределения вероятности теоретическому подтверждается[1].

Если же окажется, что $\chi^2 > \chi_0^2$, то с той же вероятностью придется признать, что χ^2 **не является случайным числом**, подчиняющимся распределению К. Пирсона. Это будет означать, что расхождение между эмпирической и теоретической плотностями вероятности результата измерения **не случайно**, то есть гипотеза о соответствии эмпирического закона распределения вероятности теоретическому не подтверждается.

Пример 57

Сто независимых числовых значений результата измерения, каждое из которых повторилось *m* раз, приведены в первой графе табл. 25.

Проверить гипотезу о том, что результат измерения подчиняется нормальному закону распределения вероятности.

Таблица 25

Q	m	mQ	$Q-\hat{Q}_{100}$	$(Q-\hat{Q}_{100})^2$	$m(Q-\hat{Q}_{100})^2$
8,30	1	8,30	−0,33	0,1089	0,1089
8,35	2	16,70	−0,28	0,0784,	0,1568
8,40	4	33,60	−0,23	0,0529	0,2116
8,45	5	42,25	−0,18	0,0324	0,1620
8,50	8	68,00	−0,13	0,0169	0,1352
8.55	10	85,50	−0,08	0,0064	0,0640
8,60	18	154,80	−0,03	0,0009	0,0162
8,65	17	147,05	0,02	0,0004	0,0068
8,70	12	104,40	0,07	0,0049	0,0588
8,75	9	78,75	0,12	0,0144	0,1296
8,80	7	61,60	0,17	0,0289	0,2023
8,85	6	53,10	0,22	0,0484	0,2904
8,90	0	—	—	—	—
8,95	1	8,95	0.32	0,1024	0,1024

Решение

1. Используя результаты вспомогательных вычислений, приведенные в третьей графе табл. 25, найдем среднее арифметическое значение результата измерения: $\hat{Q}_{100} = 8{,}63$.

[1] Результаты проверок по критериям согласия не являются доказательствами.

2. Используя результаты вспомогательных вычислений, приведенные в четвертой, пятой и шестой графах табл. 25, найдем стандартное отклонение результата измерения:

$$S_Q = 0{,}13.$$

3. Ни одно из значений результата измерения не отличается от среднего арифметического больше чем на $4S_Q$ = 0,52. Следовательно, на основании неравенства П. Л. Чебышева с вероятностью не менее 0,94 можно считать, что ошибок нет.

4. Для получения представления о характере закона распределения вероятности результата измерения по данным табл. 26 построим гистограмму.

Таблица 26

Интервалы	m_i	m_i / $n\Delta Q$
8,2 ... 8,3	0	0
8,3 ... 8,4	3	0,3
8,4 ... 8,5	9	0,9
8,5 ... 8,6	18	1,8
8,6 ... 8,7	35	3,5
8,7 ... 8,8	21	2,1
8,8 ... 8,9	13	1,3
8,9 ... 9,0	1	0,1
9,0 ... 9,1	0	0

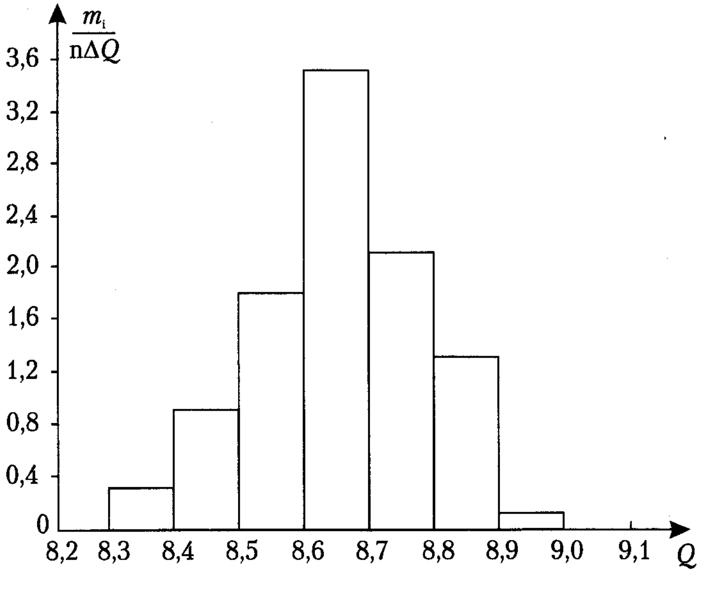


Рис. 71. Гистограмма, построенная по данным табл. 26

Вид гистограммы позволяет предположить, что результат измерения подчиняется нормальному закону распределения вероятности.

5. Правдоподобие этой гипотезы проверим по критерию К. Пирсона. При использовании критерия К. Пирсона в каждом интервале должно быть не меньше пяти независимых значений результата измерения. В соответствии с этим образуем интервалы так, как это показано во второй графе табл. 27.

Таблица 27

i	Интервал $[Q_{i-1}; Q_i]$	m_i	t_i	$L(t_i)$	P_i	$m_i - nP_i$	$\frac{(m_i - nP_i)^2}{nP_i}$
1	[–∞; 8,425]	7	–1,614	–0,4467	0,0533	1,67	0,523
2	[8,425; 8,475]	5	–1,220	–0,3888	0,0579	–0,79	0,108
3	[8,475; 8,525]	8	–0,827	–0,2959	0,0929	–1,29	0,179
4	[8,525; 8,575]	10	–0,433	–0,1676	0,1283	–2,83	0,624
5	[8,575; 8,625]	18	–0,039	–0,0156	0,1520	2,80	0,516
6	[8,625; 8,675]	17	0,354	0,1383	0,1539	1,61	0,168
7	[8,675; 8,725]	12	0,748	0,2728	0,1345	–1,45	0,157
8	[8,725; 8,775]	9	1,142	0,3733	0,1005	–1,05	0,110
9	[8,775; 8,825]	7	1,536	0,4377	0,0644	0,56	0,048
10	[8,825; +∞]	7	∞	0,5000	0,0623	0,77	0,095

6. Определим, на сколько S_Q и в каком направлении отстоит от среднего арифметического правая граница Q_i каждого интервала:

$$t_i = \frac{Q_i - \hat{\bar{Q}}_{100}}{S_Q} = \frac{Q_i - 8{,}63}{0{,}13}.$$

Полученные значения параметра t_i внесем в четвертую графу табл. 27.

7. По значению t_i из верхнего графика на рис. 52 можно определить, с какой вероятностью отдельное значение результата измерения, подчиняющегося нормальному закону распределения вероятности, попадает в интервал $[\hat{\bar{Q}} - t_i S_Q;\ \hat{\bar{Q}} + t_i S_Q]$. С вероятностью в 2 раза меньшей оно попадает в левую или правую половину этого интервала. Эта вероятность представляет собой функцию Лапласа $L(t_i)$, так что для повышения точности расчетов можно пользоваться не графиком, а табл. 9. Полученные из табл. 9 значения $L(t_i)$ занесены в пятую графу табл. 27.

8. Теоретическая вероятность P_i попадания в i-й интервал отдельного значения результата измерения, подчиняющегося нормальному закону,

$$P_i = L(t_i) - L(t_{i-1}).$$

Принимая во внимание, что $L(-\infty) = -0{,}5$, а $L(\infty) = 0{,}5$, поместим рассчитанные значения P_i в шестую графу табл. 27.

9. В седьмую и восьмую графу внесены результаты остальных вспомогательных вычислений. Суммирование чисел в восьмой графе дает

$$\chi^2 = 2{,}528.$$

10. Из графика на рис. 70 видно, что рассчитанное значение $\chi^2 < \chi_0^2$, которое соответствует, например, вероятности 0,95. Обычно вероятность, с которой принимается решение, выбирается равной 0,9 ... 0,95. Таким образом, можно принять гипотезу о том, что результат измерения подчиняется нормальному закону распределения вероятности.

При проверке нормальности закона распределения вероятности результата измерения применение критерия К. Пирсона дает хорошие результаты, только если n > 40 ... 50. При 10 ... 15 < n ≤ 40 ... 50 применяется так называемый *составной критерий*. Сначала рассчитывается

$$d = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|Q_i - \hat{Q}_n\right|}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i - \hat{Q}_n\right)^2}}$$

и проверяется выполнение условия

$$d_{min} \le d \le d_{max},$$

где d_{min} и d_{max} зависят от вероятности P*, с которой принимается решение, и находятся по табл. 28.

Таблица 28

n	P* = 0,90		P* = 0,95		P* = 0,99	
	d_{min}	d_{max}	d_{min}	d_{max}	d_{min}	d_{max}
11	0,7409	0,8899	0,7153	0,9073	0,6675	0,9359
16	7452	8733	7236	8884	6829	9137
21	7495	8631	7304	8768	6950	9001
26	7530	8570	7360	8686	7040	8901
31	7559	8511	7404	8625	7110	8827
36	7583	8468	7440	8578	7167	8769
41	7604	8436	7470	8540	7216	8722
46	7621	8409	7496	8508	7256	8682
51	7636	8385	7518	8481	7291	8648

Если это условие соблюдается, то дополнительно проверяются периферийные значения в массиве экспериментальных данных. При 10 < n ≤ 20 считается допустимым отклонение *одного* из независимых значений результата измерения от среднего арифметического больше чем на $2{,}5S_Q$, при 20 < n ≤ 50 — *двух*, что соответствует доверительной вероятности P** ≈ 0,98.

Несоблюдения хотя бы одного из этих двух условий достаточно для того, чтобы гипотеза о нормальности закона распределения вероятности результата измерения была отвергнута. В противном случае гипотеза принимается с вероятностью $P \geq P^* + P^{**} - 1$.

При $n \leq 10 \ldots 15$ гипотеза о том, что результат измерения подчиняется нормальному закону распределения вероятности, не проверяется. Решение принимается на основе анализа априорной информации.

Определение пределов, в которых находится значение измеряемой величины

При многократном измерении с равноточными значениями отсчета и нормальном законе распределения вероятности результата измерения решение обратной задачи состоит в отождествлении математического ожидания среднего арифметического $M(\hat{\bar{Q}}_n)$ со значением измеряемой величины Q. Закон распределения вероятности среднего арифметического является композицией законов распределения вероятности n слагаемых. При $n \to \infty$ в соответствии с центральной предельной теоремой он стремится к нормальному закону распределения, независимо от того, каким законам распределения вероятности подчиняются слагаемые. Так что **при больших массивах экспериментальных данных можно считать, что результат многократного измерения $\hat{\bar{Q}}_n$ всегда подчиняется нормальному закону распределения вероятности**, а $M(\hat{\bar{Q}}_n) = \bar{Q} \equiv Q$.

На рис. 72, имеющем иллюстративный характер, показаны плотности вероятности результата измерения, подчиняющегося нормальному закону, и его среднего арифметического значения.

Задавшись доверительной вероятностью P, по верхней кривой на рис. 52 можно определить параметр t, показывающий, на сколько $S_{\hat{\bar{Q}}_n}$ полученное экспериментально значение среднего арифметического $\hat{\bar{Q}}_n$ может отличаться от его математического ожидания $M(\hat{\bar{Q}}_n)$, отождествляемого со значением измеряемой величины Q. С той же вероятностью значение измеряемой величины Q находится в интервале $[\hat{\bar{Q}}_n - tS_{\hat{\bar{Q}}_n}; \hat{\bar{Q}}_n + tS_{\hat{\bar{Q}}_n}]$. Эта измерительная информация записывается в форме:

$$\boxed{Q = \hat{\bar{Q}}_n - tS_{\hat{\bar{Q}}_n} \ldots \hat{\bar{Q}}_n + tS_{\hat{\bar{Q}}_n} \text{ с вероятностью } P.}$$

При небольшом объеме экспериментальных данных, *если результат измерения подчиняется нормальному закону распределения вероятности*, то среднее арифметическое подчиняется *закону распределения вероятности Стьюдента* с математическим ожиданием $M(\hat{\bar{Q}}_n) = \bar{Q} \equiv Q$. При увеличении n распределение вероятности Стьюдента быстро приближается к нормальному, становясь почти неотличимым от него уже при $n > 40 \ldots 50$.

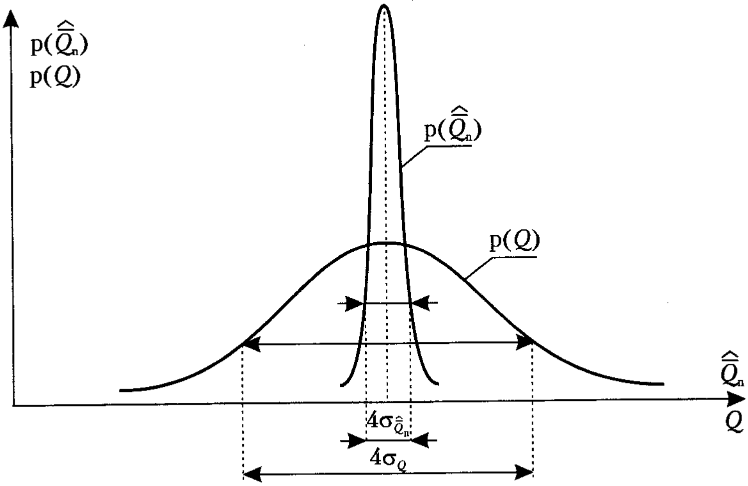


Рис. 72. Графики плотности вероятности результата измерения и его среднего арифметического значения, подчиняющихся нормальному закону распределения вероятности

На рис. 73 приведены зависимости вероятности попадания среднего арифметического $\hat{Q}_n$, подчиняющегося закону распределения вероятности Стьюдента, в окрестность его математического ожидания $\mathbf{M}(\hat{Q}_n)$ при различных n (для большей точности расчетов можно пользоваться табл. 18).

Задавшись доверительной вероятностью P, можно по кривой, соответствующей определенному n, определить параметр t, показывающий, на сколько $S_{\hat{Q}_n}$ полученное экспериментально значение среднего арифметического $\hat{Q}_n$ может отличаться от его математического ожидания $\mathbf{M}(\hat{Q}_n)$, отождествляемого со значением измеряемой величины Q. С той же вероятностью значение измеряемой величины Q находится в интервале $[\hat{Q}_n - tS_{\hat{Q}_n}; \hat{Q}_n + tS_{\hat{Q}_n}]$. Форма записи этой информации не отличается от приведенной выше.

При небольшом объеме экспериментальных данных, *если результат измерения не подчиняется нормальному закону распределения вероятности*, определение закона распределения вероятности среднего арифметического представляет достаточно сложную задачу. Среднее арифметическое в этом случае может оказаться неэффективной оценкой, но его все равно целесообразно использовать, так как, согласно выражению (32), стандартное отклонение среднего арифметического при любом законе распределения в $\sqrt{n}$ раз меньше стандартного отклонения результата измерения.

Задавшись доверительной вероятностью P, можно по нижней кривой на рис. 52 определить параметр t, показывающий самое большое количество $S_{\hat{Q}_n}$, на которое полученное экспериментально значение среднего арифметического $\hat{Q}_n$ может отличаться от его математического ожидания $\mathbf{M}(\hat{Q}_n)$, отождествляемого

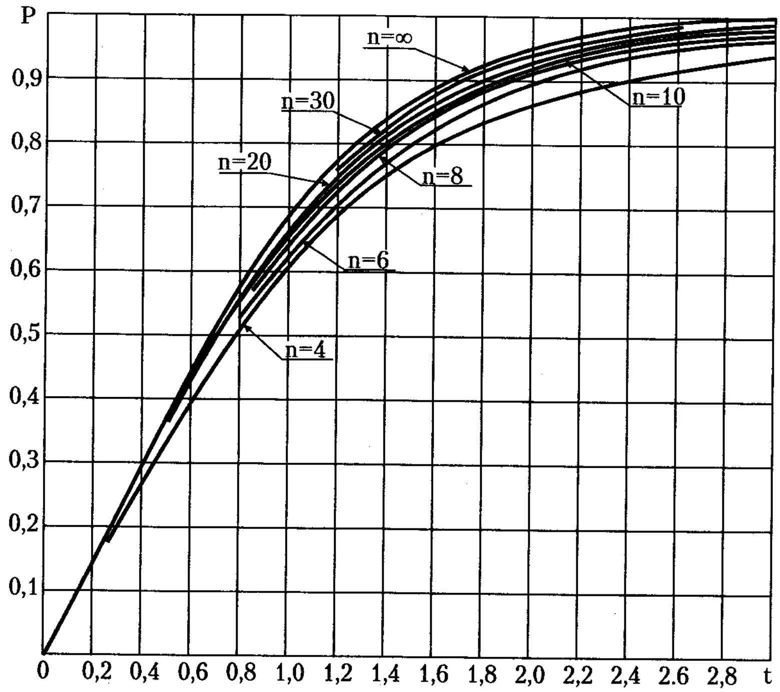


Рис. 73. Вероятность попадания среднего арифметического в окрестность его математического ожидания

со значением измеряемой величины Q. С той же вероятностью значение измеряемой величины Q находится в интервале $[\hat{Q}_n - tS_{\hat{Q}_n}; \hat{Q}_n + tS_{\hat{Q}_n}]$. Форма записи этой измерительной информации приведена выше.

Если согласно априорной информации результат измерения подчиняется симметричному закону распределения вероятности, то его среднее арифметическое значение тоже подчиняется симметричному закону. В этом случае вместо нижней кривой на рис. 52 можно пользоваться средней, показанной пунктиром.

6.2.2. Многократное измерение с неравноточными значениями отсчета

Для того чтобы найти оценку среднего значения результата измерения (отождествляемого со значением измеряемой величины) при многократном измерении с неравноточными значениями отсчета, воспользуемся универсальным методом отыскания эффективных оценок числовых характеристик любых законов распределения вероятности случайных величин, разработанным Р. А. Фишером. Он называется *методом максимального правдоподобия*.

Сущность метода максимального правдоподобия заключается в следующем.

Многомерная плотность распределения вероятности системы случайных значений $p(Q_1, Q_2, ...Q_n)$ рассматривается как функция числовых характеристик закона распределения вероятности. Эта функция

$$L = p\left(Q_1, Q_2, ...Q_n, \overline{Q}, \sigma_Q^2, ...\right)$$

называемая *функцией правдоподобия*, показывает, насколько то или иное значение каждой числовой характеристики «более правдоподобно», чем другие. Функция правдоподобия достигает максимума при значениях переменных, являющихся их наиболее эффективными оценками. Последние, следовательно, находятся из условия:

$$L = p\left(Q_1, Q_2, ...Q_n, \overline{Q}, \sigma_Q^2, ...\right) = \max,$$

что равносильно совместному решению уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{\overline{Q}}} = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{\sigma}_Q^2} = 0;$$

$$...............\,.$$

Для упрощения вычислений функцию правдоподобия иногда логарифмируют. Так как логарифм является монотонной функцией, то L и ln L достигают экстремума при одних и тех же значениях переменных. Наиболее эффективные оценки числовых характеристик, следовательно, могут определяться из совместного решения уравнений:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \hat{\overline{Q}}} = 0;$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \hat{\sigma}_Q^2} = 0;$$

$$...............\,.$$

При многократном измерении с неравноточными значениями отсчета, подчиняющимися нормальному закону распределения вероятности, функцию правдоподобия можно представить в виде

$$L = \frac{1}{\sigma_{Q_1}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(Q_1-\overline{Q})^2}{2\sigma_{Q_1}^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_{Q_2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(Q_2-\overline{Q})^2}{2\sigma_{Q_2}^2}} \; ... \; = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\prod\limits_{i=1}^{n}\sigma_{Q_i}} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(Q_i-\overline{Q})^2}{2\sigma_{Q_i}^2}},$$

если все значения отсчета, полученные, например, с помощью разных средств измерений, являются независимыми. Логарифмирование левой и правой частей этого уравнения дает:

$$\ln L = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(Q_i - \overline{Q})^2}{\sigma_{Q_i}^2} - C,$$

где C от $\overline{Q}$ не зависит. Решая при $\overline{Q} = \hat{\overline{Q}}$ уравнение

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \hat{\overline{Q}}} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_{Q_i}^2}(Q_i - \hat{\overline{Q}}) = 0,$$

получим:

$$\boxed{\hat{\bar{Q}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{Q_i}^2} Q_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{Q_i}^2}},}$$

или

$$\boxed{\hat{\bar{Q}} = g_1 Q_1 + g_2 Q_2 + \ldots + g_n Q_n.}$$

Это так называемое *среднее взвешенное*, при вычислении которого отдельные значения результата многократного измерения суммируются с «весами», обратно пропорциональными их дисперсиям:

$$g_i = \frac{\frac{1}{\sigma_{Q_i}^2}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{Q_i}^2}}.$$

Тем самым **более точным значениям результата измерения придается больший вес**. Наличие нормирующего множителя в виде суммы в знаменателе последнего выражения обеспечивает выполнение условия нормировки:

$$\sum_{i=1}^{n} g_i = 1.$$

Математическое ожидание среднего взвешенного

$$\mathbf{M}(\hat{\bar{Q}}) = \mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{n} g_i Q_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}(g_i Q_i) = \sum_{i=1}^{n} g_i \mathbf{M}(Q_i) = \bar{Q}_i \sum_{i=1}^{n} g_i = \bar{Q}.$$

Таким образом, среднее взвешенное является не только эффективной, но и несмещенной оценкой среднего значения результата измерения.

Дисперсия среднего взвешенного

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_{\hat{\bar{Q}}}^2 &= \mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{n} g_i Q_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}(g_i Q_i) = \sum_{i=1}^{n} g_i^2 \mathbf{D}(Q_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\frac{1}{\sigma_{Q_i}^2}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{Q_i}^2}}\right)^2 \sigma_{Q_i}^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{1}{\sigma_{Q_i}^2}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{Q_i}^2}\right)^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{Q_i}^2}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{Q_i}^2}\right)^2} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{Q_i}^2}}. \end{aligned}}$$

Легко видеть, что при равноточных значениях отсчета отсюда вытекает формула (31).

Пример 58

Измерения меры длины, являющейся рабочим эталоном, выполненные приборами разной точности, дали результаты, приведенные в табл. 29.

Таблица 29

Порядковый номер измерения	Отклонение от номинального значения меры, мкм			
	Вертикальный оптиметр	Машина типа Цейсс	Машина типа Сип	Миниметр с ценой деления 1 мкм
1	11,3	10,8	9,8	10,4
2	—	11,1	10,7	11,2
3	—	10,9	—	10,1
4	—	—	—	9,9

Известно, что результат измерения вертикальным оптиметром подчиняется нормальному закону распределения вероятности со стандартным отклонением 0,4 мкм; при измерении машиной типа Цейсс — соответственно 0,8 мкм; машиной типа Сип — 0,7 мкм; миниметром с ценой деления 1 мкм — 0,5 мкм. Каково отклонение размера от номинального значения?

Решение. Заменив дисперсии в выражении для среднего взвешенного их оценками, получим:

$$\hat{\Delta l} = \frac{\frac{1}{S^2_{\Delta l_1}}\Delta l_1 + \frac{1}{S^2_{\Delta l_2}}\Delta l_2 + \ldots + \frac{1}{S^2_{\Delta l_n}}\Delta l_n}{\frac{1}{S^2_{\Delta l_1}} + \frac{1}{S^2_{\Delta l_2}} + \ldots + \frac{1}{S^2_{\Delta l_n}}}.$$

Подстановка известных значений $S_{\Delta l_i}$ и измеренных отклонений Δl_i дает:

$$\hat{\Delta l} = \frac{\frac{1}{0{,}16}11{,}3 + \frac{1}{0{,}64}(10{,}8+11{,}1+10{,}9) + \frac{1}{0{,}49}(9{,}8+10{,}7) + \frac{1}{0{,}25}(10{,}4+11{,}2+10{,}1+9{,}9)}{\frac{1}{0{,}16}+\frac{1}{0{,}64}+\frac{1}{0{,}49}+\frac{1}{0{,}25}} = 10{,}65 \text{ мкм}.$$

Стандартное отклонение $\hat{\Delta l}$:

$$S_{\hat{\Delta l}} = \sqrt{\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{S^2_{\Delta l_i}}}} = \sqrt{\frac{1}{31}} = 0{,}18 \text{ мкм}.$$

Поскольку все Δl_i подчиняются нормальному закону распределения вероятности, постольку нормальному закону подчиняется и их среднее взвешенное. Поэтому отклонение меры длины от номинального значения

$\Delta L = (10{,}3\ldots11)$ мкм с вероятностью 0,95.

6.2.3. Обработка нескольких серий измерений

Иногда многократное измерение одной и той же величины постоянного размера производится в несколько этапов, разными людьми, в различных условиях, в разных местах и в разное время. Результат такого измерения определяется несколькими сериями полученных значений, которые в силу различных обстоятельств могут отличаться по своим статистическим характеристикам. Серии называются *однородными*, если состоят из значений, подчиняющихся одному и тому же закону распределения вероятности. В противном случае серии считаются *неоднородными*.

Проверка однородности является обязательной при выборе способа совместной обработки результатов нескольких серий измерений. Обычно ограничиваются проверкой нормальности закона распределения вероятности результатов измерений в каждой серии и значимости различий в оценках числовых характеристик.

Если экспериментальные данные в каждой серии не подчиняются нормальному закону распределения вероятности, то, хотя это не является доказательством того, что измерения в сериях не подчиняются одному и тому же закону распределения вероятности, проверка на этом обычно заканчивается и серии рассматриваются как *неоднородные*. Экспериментальные данные в таких сериях не подлежат совместной обработке.

Если экспериментальные данные в двух разных сериях подчиняются нормальному закону распределения вероятности, то проверяется, нет ли различия между средними арифметическими $\hat{\bar{Q}}_{\rm I}$ и $\hat{\bar{Q}}_{\rm II}$? Если есть, то у однородных серий оно может быть только случайным со средним значением, равным нулю, и дисперсией

$$\sigma^2_{\hat{\bar{Q}}_{\rm II}-\hat{\bar{Q}}_{\rm I}} = \frac{\sigma^2_{\hat{Q}_{\rm I}}}{n_{\rm I}} + \frac{\sigma^2_{\hat{Q}_{\rm II}}}{n_{\rm II}}.$$

При больших массивах экспериментальных данных в каждой серии, подчиняющихся нормальному закону распределения вероятности, нормальному закону подчиняются и средние арифметические $\hat{\bar{Q}}_{\rm I}$ и $\hat{\bar{Q}}_{\rm II}$, и их разность $G = \hat{\bar{Q}}_{\rm II} - \hat{\bar{Q}}_{\rm I}$. При небольшом количестве экспериментальных данных в каждой серии средние арифметические $\hat{\bar{Q}}_{\rm I}$ и $\hat{\bar{Q}}_{\rm II}$ подчиняются закону распределения вероятности Стьюдента, но их разность при $n_{\rm I} + n_{\rm II} > 40 \ldots 50$ подчиняется нормальному закону. Поэтому, задавшись доверительной вероятностью P и определив по соответствующему графику на рис. 73 значение t, находят доверительные границы $G \pm tS_G$, за пределами которых не может оказаться разность $\hat{\bar{Q}}_{\rm II} - \hat{\bar{Q}}_{\rm I}$, если она случайная и подчиняется нормальному закону распределения вероятности со средним значением, равным нулю (рис. 74). При несоблюдении этого условия нужно искать причину расхождения между $\hat{\bar{Q}}_{\rm II}$ и $\hat{\bar{Q}}_{\rm I}$. Возможно, что в экспериментальные данные одной из серий следует внести поправку,

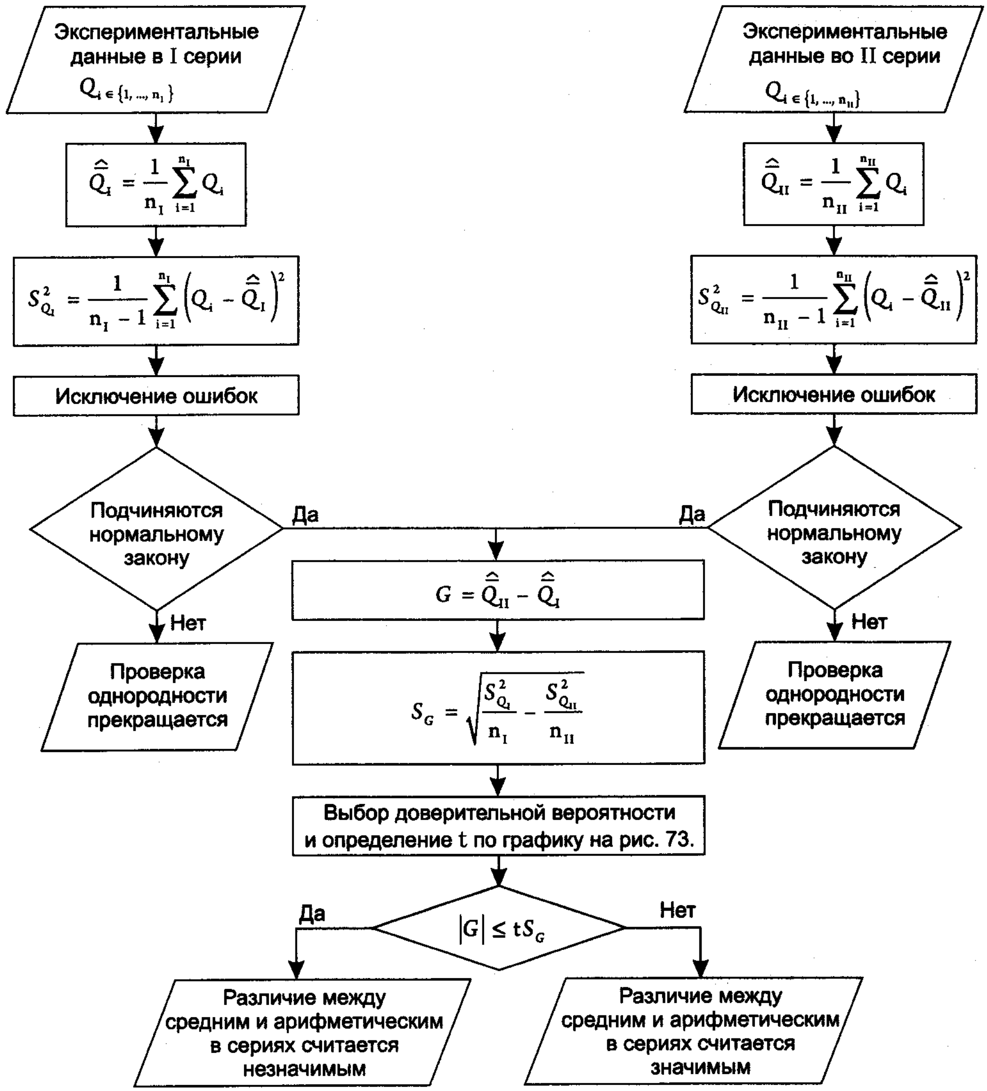


Рис. 74. Проверка значимости различия между средними арифметическими в двух сериях

а возможно, что в разных сериях измерялись разные размеры, и тогда совместная обработка серий бессмысленна.

Иногда большой массив экспериментальных данных (рис. 75) искусственно разбивают на две или большее количество серий для обнаружения посредством такой проверки прогрессирующего влияния какого-нибудь фактора.

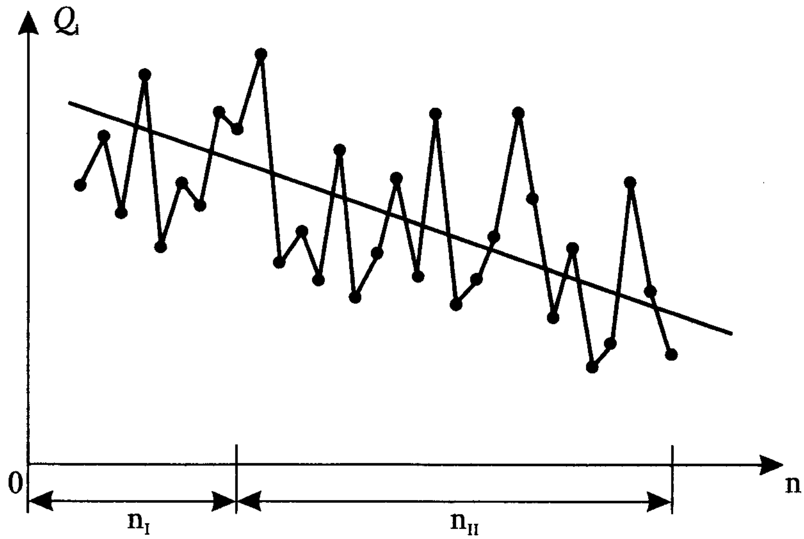


Рис. 75. Разделение массива экспериментальных данных на две серии с целью обнаружения прогрессирующего действия влияющего фактора

Помимо выяснения значимости различия между средними арифметическими проверка однородности серий включает сравнение оценок их дисперсий. Серии с незначимым различием оценок дисперсий называются *равнорассеянными*, с существенным различием — *неравнорассеянными*. Значимость различия оценок дисперсий в двух сериях, результаты измерения в которых подчиняются нормальному закону распределения вероятности, проверяется в порядке, приведенном на рис. 76, где первоначальные операции совпадают с показанными на рис. 74 и поэтому при проверке однородности серий выполняются один раз.

В процессе вычислений образуется отношение ψ, причем таким образом, чтобы оно было не менее единицы. Если это число случайное, то оно подчиняется *закону распределения вероятности Р. А. Фишера*. Поэтому, выбрав значение интегральной функции распределения вероятности Р. А. Фишера равным вероятности Р, с которой принимается решение, можно проверить, больше или меньше ее аргумента ψ_o вычисленное значение ψ. Если $\psi \le \psi_o$, то различие оценок дисперсий в сериях можно признать случайным и с выбранной вероятностью Р считать, что гипотеза о равнорассеянности серий не противоречит результатам ее проверки по *критерию Р. А. Фишера*. В противном случае эта гипотеза должна быть отвергнута. Значения аргумента интегральной функции распределения вероятности Р. А. Фишера приведены в табл. 30.

Подчиняющиеся одному и тому же закону распределения вероятности равнорассеянные серии с незначимым различием между средними арифмети-

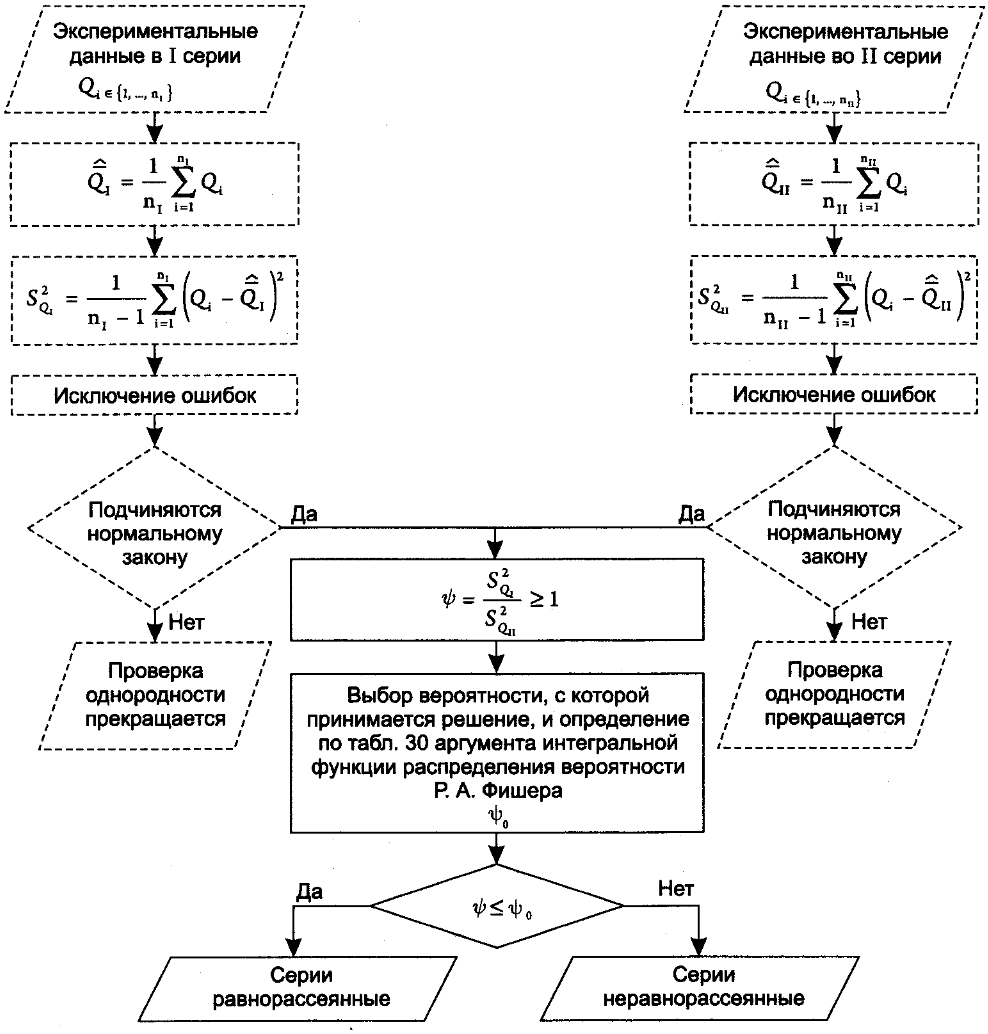


Рис. 76. Проверка равнорассеянности двух серий измерений

ческими считаются однородными. Если входящие в них экспериментальные данные получены в одних и тех же условиях, это говорит о сходимости измерений, если в разных — о воспроизводимости. Под *сходимостью* понимается качество измерений, отражающее близость друг к другу результатов измерений, выполненных в одинаковых условиях, под *воспроизводимостью* — в разных (в различных местах, в разное время, различными методами и средствами). **Если серии неоднородны** (подчиняются разным законам распределения вероятности, неравнорассеянные, или различие между средними арифметическими не может быть признано незначимым), об измерениях говорят, что они не сходятся (или не воспроизводятся).

Таблица 30. Значения аргумента ψ_0 интегральной функции распределения вероятности Р. А. Фишера

n_{II}	P	n_I												
		2	3	4	5	6	7	9	13	16	21	25	51	∞
2	0,90	39,9	49,5	53,6	55,8	57,2	58,2	59,4	60,7	61,2	61,7	62,0	62,7	63,3
	0,95	161	200	216	225	230	234	239	244	246	248	249	252	254
3	0,90	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,37	9,41	9,42	9,44	9,45	9,47	9,49
	0,95	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5
	0,99	98,5	99,0	99,2	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,5	99,5	99,5
4	0,90	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,25	5,22	5,20	5,18	5,18	5,15	5,13
	0,95	10,1	9,55	9,28	9,28	9,10	8,94	8,85	8,74	8,70	8,66	8,64	8,58	8,53
	0,99	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,5	27,1	26,9	26,7	26,6	26,4	26,1
5	0,90	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,95	3,90	3,87	3,84	3,83	3,80	3,76
	0,95	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,86	5,80	5,77	5,70	5,63
	0,99	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	14,8	14,4	14,2	14,0	13,9	13,7	13,5
6	0,90	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,34	3,27	3,24	3,21	3,19	3,15	3,10
	0,95	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,62	4,56	4,53	4,44	4,36
	0,99	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,3	9,89	9,72	9,55	9,47	9,24	9,02
7	0,90	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	2,98	2,90	2,87	2,84	2,82	2,77	2,72
	0,95	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,94	3,87	3,84	3,75	3,67
	0,99	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,10	7,72	7,56	7,40	7,31	7,09	6,88
9	0,90	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,59	2,50	2,46	2,42	2,40	2,35	2,29
	0,95	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,22	3,15	3,12	3,02	2,93
	0,99	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,03	5,67	5,52	5,36	5,28	5,07	4,86
13	0,90	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,24	2,15	2,10	2,06	2,04	1,97	1,90
	0,95	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,62	2,54	2,51	2,40	2,30
	0,99	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,50	4,16	4,01	3,86	3,78	3,57	3,36
16	0,90	2,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,12	2,02	1,97	1,92	1,90	1,83	1,76
	0,95	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,40	2,33	2,29	2,18	2,07
	0,99	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,00	3,67	3,52	3,37	3,29	3,08	2,87
21	0,90	2,97	3,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,00	1,89	1,84	1,79	1,77	1,69	1,61
	0,95	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,20	2,12	2,08	1,97	1,84
	0,99	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,23	3,09	2,94	2,86	2,64	2,42
25	0,90	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,94	1,83	1,78	1,73	1,70	1,62	1,53
	0,95	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	2,11	2,03	1,98	1,86	1,73
	0,99	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,36	3,03	2,89	2,74	2,66	2,44	2,21
51	0,90	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,77	1,66	1,60	1,54	1,51	1,41	1,29
	0,95	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,10	1,92	1,84	1,75	1,70	1,56	1,39
	0,99	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,82	2,50	2,35	2,20	2,12	1,88	1,60
∞	0,90	2,71	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,67	1,55	1,49	1,42	1,38	1,26	1,00
	0,95	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	1,94	1,75	1,67	1,57	1,52	1,35	1,00
	0,99	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,51	2,18	2,04	1,88	1,79	1,52	1,00

Ценность измерительной информации вызывает стремление использовать весь экспериментальный материал, содержащийся в разных сериях измерений. **Экспериментальные данные, входящие в однородные серии, можно рассматривать и обрабатывать как единый массив**. Для сокращения вычислений при этом целесообразно использовать полученные ранее результаты:

$$\hat{Q} = \frac{n_I \hat{Q}_I + n_{II} \hat{Q}_{II}}{N};$$

$$S_{\hat{Q}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\left[(n_I - 1)S^2_{Q_I} + (n_{II} - 1)S^2_{Q_{II}} + n_I(\hat{Q}_I - \hat{Q})^2 + n_{II}(\hat{Q}_{II} - \hat{Q})^2\right]},$$

где $N = n_I + n_{II}$.

При обработке неравнорассеянных серий с незначимо различающимися средними арифметическими учитывается особая ценность измерений, выполненных с большей точностью. Дисперсия (рассеяние) в таких сериях меньше. Для учета этого в оценку среднего значения всего массива экспериментальных данных включают средние арифметические серий с «весами», обратно пропорциональными оценкам их дисперсий:

$$\hat{Q} = \frac{\frac{1}{S^2_I}\hat{Q}_I + \frac{1}{S^2_{II}}\hat{Q}_{II} + \ldots + \frac{1}{S^2_\ell}\hat{Q}_\ell}{\frac{1}{S^2_I} + \frac{1}{S^2_{II}} + \ldots + \frac{1}{S^2_\ell}}.$$

Это уже знакомое по предыдущему разделу среднее взвешенное. Стандартное отклонение среднего взвешенного

$$S_{\hat{Q}} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{j=1}^{\ell}\frac{1}{S^2_j}}}.$$

Порядок обработки экспериментальных данных $Q_{i,j}$, по m_j которых входит в каждую из ℓ неравнорассеянных серий с незначимым различием средних арифметических, показан на рис. 77.

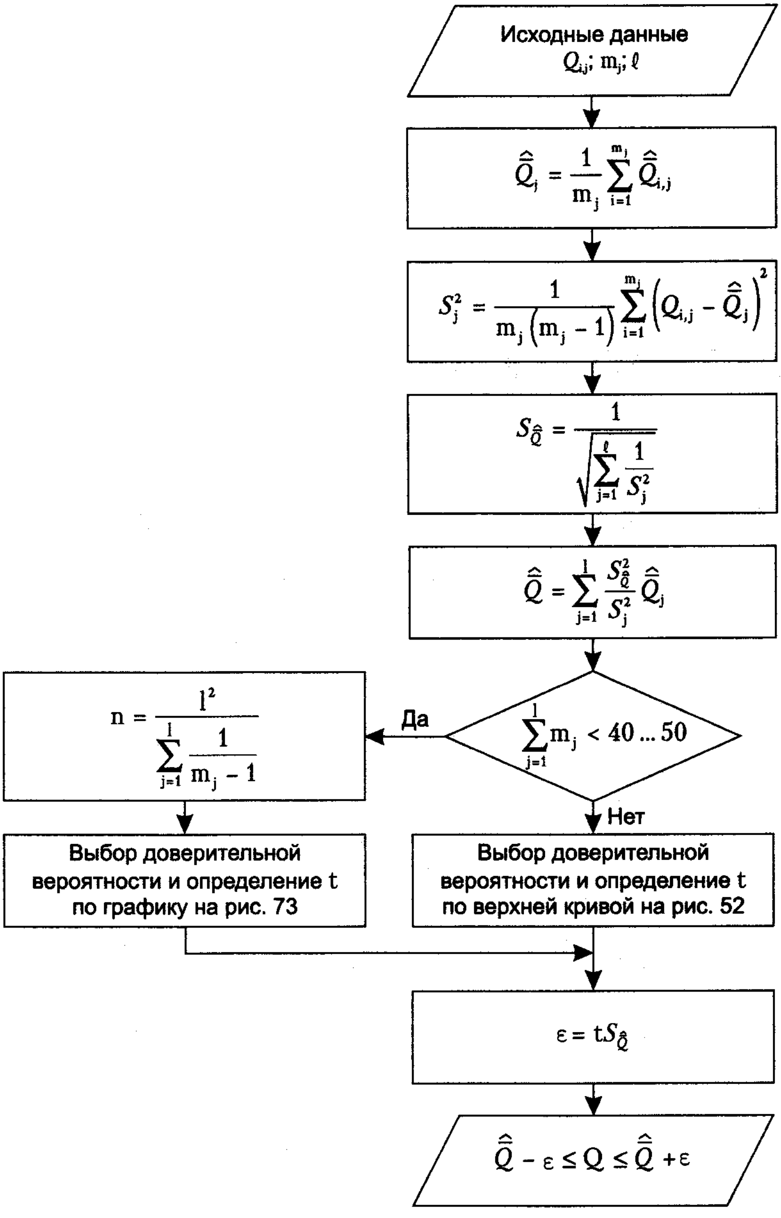


Рис. 77. Обработка экспериментальных данных, входящих в неравнорассеянные серии

Глава 7
Качество измерений

7.1. Качество измерений по шкале порядка

Результатом измерения по шкале порядка является *решение*. В соответствии с третьей аксиомой метрологии оно *случайное*, то есть может быть *правильным* или *неправильным*. Таким образом, само собой разумеющимся *показателем качества* результата измерения по шкале порядка служит *вероятность* того, что он является правильным.

Не менее часто встречающимся на практике показателем качества решения является вероятность того, что оно является ошибочным. Чем больше вероятность ошибки, тем ниже качество результата измерения.

Ошибочные решения при измерении по шкале порядка подразделяются на ошибки I и II рода. Уменьшение вероятности ошибки I рода P_I влечет за собой увеличение вероятности ошибки II рода P_{II}, и наоборот. Так что вполне естественное стремление к минимизации ошибок является противоречивым.

Решения, наилучшим образом удовлетворяющие противоречивым требованиям, называются *оптимальными*. **Объективно** наилучшими (*оптимальными*) решениями были бы такие, при которых наблюдатель (оператор, контролер) вообще не совершал бы ошибок или, по крайней мере, вероятность их была бы минимальной. Поэтому критерий оптимизации

$$P_{ош} = P_I + P_{II} = \min$$

называется *критерием идеального наблюдателя*.

Вероятность ошибки I рода по правилу умножения вероятностей равна условной вероятности, умноженной на вероятность выполнения условия. В теории индикатора (см. п. 5.1) $P_I = \alpha P_{н}$; если речь идет о взаимоотношениях между поставщиком (производителем) и заказчиком (потребителем), — см. п. 6.1, — то $P_I = \alpha P_г$. Соответственно $P_{II} = \beta P_{сп}$ или $P_{II} = \beta P_б$. Например, при заключении контракта на поставку продукции поставщик (производитель) заинтересован в том, чтобы вероятность ошибки I рода, состоящей в том, что годное изделие по ошибке будет забраковано, была бы как можно меньше. В материальном выражении *риск поставщика* составляет

$$R_п = g_1 P_I = g_1 \alpha P_г,$$

где g_1 — цена ошибки I рода. В свою очередь, *риск заказчика*, заинтересованного в том, чтобы вероятность пропуска брака из-за ошибки II рода была минимальной, составляет

$$R_з = g_2 \beta P_б,$$

где g_2 — цена ошибки II рода. **Объективно** наилучшим (*оптимальным*) решением будет такое, при котором материальные потери от ошибок как I, так и II рода будут в среднем минимальными. Поэтому критерий оптимизации

$$R = R_п + R_з = g_1 \alpha P_г + g_2 \beta P_б = \min$$

называется *критерием минимума среднего риска*. Критерий идеального наблюдателя

$$P_{ош} = P_I + P_{II} = \alpha P_г + \beta P_б = \min$$

является частным случаем этого критерия.

По аналогии с формулами (25), (26) условные вероятности ошибок I и II рода в общем виде записываются следующим образом:

$$\alpha = \int_{Q_п}^{\infty} p_г(Q) dQ,$$

$$\beta = \int_{-\infty}^{Q_п} p_б(Q) dQ,$$

где $p_г(Q)$ — плотность вероятности результата измерения контролируемого размера у годного изделия, $p_б(Q)$ — у бракованного, а $Q_п$ — некоторое пороговое значение результата измерения, на основании сравнения с которым принимается решение. Подставив эти выражения в формулу для среднего риска, получим:

$$R = \int_{Q_п}^{\infty} g_1 P_г p_г(Q) dQ + \int_{-\infty}^{Q_п} g_2 P_б p_б(Q) d(Q).$$

Если теперь в правую часть этого уравнения добавить и вычесть $\int_{-\infty}^{Q_п} g_1 P_г p_г(Q) dQ$, то равенство не нарушится, а формула для среднего риска примет вид:

$$R = g_1 P_г + \int_{-\infty}^{Q_п} \left[g_2 P_б p_б(Q) - g_1 P_г p_г(Q) \right] dQ.$$

Средний риск будет минимальным при таком значении $Q_п$, при котором производная от этого выражения по верхнему пределу равна нулю. Последняя, в свою очередь, равна подынтегральной функции при значении переменной, равном верхнему пределу. Таким образом, условие минимума среднего риска записывается в виде:

$$[g_2 P_б p_б(Q_п) - g_1 P_г p_г(Q_п)]dQ_п = 0,$$

или

$$\frac{p_б(Q_п)}{p_г(Q_п)} = \frac{g_1 P_г}{g_2 P_б}$$

Плотности вероятности $p_г(Q_п)$ и $p_б(Q_п)$ называют иногда *функциями правдоподобия*. Каждая из них характеризует, насколько правдоподобно отнесение изделия к числу годных или к числу бракованных. Но лучшей мерой правдоподобия является отношение этих функций $\frac{p_б(Q_п)}{p_г(Q_п)}$ обозначаемое буквой Λ и называемое *отношением правдоподобия*. Пороговое значение $Q_п$ результата измерения контролируемого размера, синтезированное по критерию минимума среднего риска

$$\Lambda = \frac{g_1 P_г}{g_2 P_б},$$

обеспечивает **объективно** наилучшее (*оптимальное*) решение, гарантирующее, что материальные потери от ошибок I и II рода будут в среднем минимальными, если решение принимается по правилу:

$$\begin{cases} \text{при } Q \le Q_п \text{ изделие признается годным;} \\ \text{при } Q > Q_п \text{ изделие бракуется.} \end{cases}$$

Пример 59

Используя условия примера 51, синтезировать решение, оптимальное по критерию минимума среднего риска, если объект бракуется уже при отношении мощности сигнала к мощности шумовых помех $\frac{\bar{u}^2}{\sigma_u^2} = 5$. Репутация фирмы-поставщика такова, что вероятность брака на порядок меньше вероятности того, что объект окажется годным, но ошибка II рода обходится в 100 раз дороже ошибки I рода.

Решение

1. Отношение правдоподобия

$$\Lambda = \frac{p_б(U)}{p_г(U)} = e^{-\frac{(U-\bar{u})^2}{2\sigma_u^2} + \frac{U^2}{2\sigma_u^2}} = e^{\frac{\bar{u}^2}{\sigma_u^2}\left(\frac{U}{\bar{u}} - \frac{1}{2}\right)} = e^{5\left(\frac{U}{\bar{u}} - \frac{1}{2}\right)}.$$

2. Средний риск будет минимальным, если

$$e^{5\left(\frac{U}{\bar{u}} - \frac{1}{2}\right)} = \frac{g_1 P_г}{g_2 P_б} = \frac{1}{100} \cdot 10 = 0{,}1$$

3. Прологарифмировав левую и правую части этого уравнения, получим:

$$5\left(\frac{U}{\bar{u}}-\frac{1}{2}\right)=-2{,}3,$$

или, учитывая, что $\bar{u} = \sigma_u\sqrt{5} = \sqrt{5 \cdot 2{,}25} = 3{,}35$ В,

$$U \approx 0{,}1 \text{ В}.$$

4. Материальные потери от ошибок I и II рода будут в среднем минимальными, если правило принятия решения будет следующим:

$$\begin{cases} \text{при } u \le 0{,}1 \text{ В объект принимается;} \\ \text{при } u > 0{,}1 \text{ В объект бракуется.} \end{cases}$$

Весьма важным является вопрос о синтезе оптимального решения при том или ином дефиците априорной информации. Рассмотрим несколько таких случаев.

I. Если неизвестна цена ошибок g_1 и g_2, то применяется *критерий идеального наблюдателя.*

Пример 60

По условиям предыдущего примера синтезировать решение, оптимальное по критерию идеального наблюдателя

$$P_{\text{ош}} = P_{\text{I}} + P_{\text{II}} = \alpha P_{\text{г}} + \beta P_{\text{б}} = \min.$$

Решение. При синтезе решения по критерию идеального наблюдателя

$$\Lambda = \frac{P_{\text{г}}}{P_{\text{б}}}.$$

Отсюда

$$e^{5\left(\frac{U}{\bar{u}}-\frac{1}{2}\right)} = \frac{P_{\text{г}}}{P_{\text{б}}} = 10.$$

После логарифмирования получим:

$$5\left(\frac{U}{\bar{u}}-\frac{1}{2}\right)=2{,}3,$$

или, учитывая, что $\bar{u} = 3{,}35$ В,

$$U \approx 3{,}2 \text{ В}.$$

Вероятность ошибок в среднем будет минимальной, если решение принимать по правилу:

$$\begin{cases} \text{при } u \le 3{,}2 \text{ В объект принимается;} \\ \text{при } u > 3{,}2 \text{ В объект бракуется.} \end{cases}$$

II. Если неизвестны априорные вероятности $P_{\text{г}}$ и $P_{\text{б}}$, то может оказаться целесообразным использование *минимаксного критерия.* Идея заключается в том, чтобы минимизировать максимально возможный риск, откуда и происходит название критерия.

Дело в том, что средний риск должен стремиться к нулю как при $P_б \to 0$ (что равносильно $P_г \to 1$), так и при $P_б \to 1$ (что равносильно $P_г \to 0$), ибо если одна из априорных вероятностей равна единице, а другая нулю, то налицо полная определенность и никакого риска совершить ошибку, принимая решение, нет. Следовательно, средний риск имеет максимальное значение при некотором значении $P_б^* = 1 - P_г^*$, не равном ни нулю, ни единице (рис. 78). Если обозначить это максимальное значение как R_{max}, а соответствующее ему отношение правдоподобия как

$$\Lambda^* = \frac{g_1 P_г^*}{g_2 P_б^*},$$

то на практике средний риск при любом $P_б$, отличном от $P_б^*$, будет меньше R_{max}, соответствующего Λ^*. Таким образом, решающее правило, основанное на использовании отношения правдоподобия Λ^*, будет ориентировано на наихудший случай и будет оптимальным (наилучшим) решением в этом наихудшем случае.

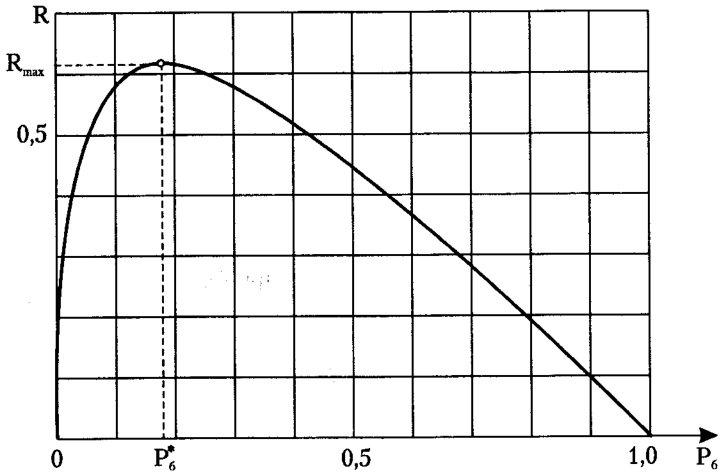


Рис. 78. Зависимость среднего риска от априорной вероятности $P_б$ в примере 61

Если бы как-то удалось узнать, чему равна вероятность $P_б$ или $P_г$, то средний риск можно было бы сразу уменьшить. Но минимаксный критерий как раз и применяется именно тогда, когда эти априорные вероятности неизвестны.

Пример 61

Используя условия примеров 51 и 59, синтезировать решение, оптимальное по минимаксному критерию.

Решение

1. Используя интегральные представления для условных вероятностей ошибок I и II рода, можно получить следующее выражение для среднего риска:

$$R = g_1 P_г\left[\frac{1}{2} - L\left(\frac{U}{\sigma_u}\right)\right] + g_2 P_б\left[\frac{1}{2} + L\left(\frac{U}{\sigma_u} - \frac{\bar{u}}{\sigma_u}\right)\right] =$$

$$= g_1(1-P_б)\left[\frac{1}{2} - L\left(\frac{U}{\bar{u}}\sqrt{\frac{\bar{u}^2}{\sigma_u^2}}\right)\right] + g_2 P_б\left\{\frac{1}{2} + L\left[\left(\frac{U}{\bar{u}} - 1\right)\sqrt{\frac{\bar{u}^2}{\sigma_u^2}}\right]\right\}.$$

По этой формуле с учетом того, что

$$e^{5\left(\frac{U}{\bar{u}} - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{100}\cdot\frac{1-P_б}{P_б},$$

откуда

$$\frac{U}{\bar{u}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\ln\frac{1-P_б}{100P_б},$$

построена зависимость R от $P_б$ на рис. 78.

2. Средний риск достигает значения $R_{max} = 0{,}61$ при $P_б = P_б^* = 0{,}174$. Исходя из этого,

$$\Lambda^* = \frac{g_1(1-P_б^*)}{g_2 P_б^*} = 0{,}047.$$

Соответствующий такому отношению правдоподобия порог находится из уравнения:

$$e^{5\left(\frac{U^*}{\bar{u}} - \frac{1}{2}\right)} = 0{,}047.$$

После логарифмирования и необходимых преобразований получаем:

$$U^* = -0{,}11\bar{u}.$$

3. Правило принятия решения, оптимального по минимаксному критерию, записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \text{при } u \le -0{,}37 \text{ В объект принимается;} \\ \text{при } u > -0{,}37 \text{ В объект бракуется.} \end{cases}$$

III. Если неизвестно отклонение контролируемого размера от номинала, приводящее к браку, или величина сигнала, который должен обнаруживаться индикатором, то есть если неизвестна β, то наилучшим (оптимальным) решением будет такое, которое обеспечивает заданную условную вероятность ошибки I рода α. Такой критерий оптимизации называется *критерием Неймана–Пирсона.* Иллюстрацией применения этого критерия служат примеры 51 и 52.

IV. Если под влиянием внешних факторов меняется мощность шумовых помех σ_u^2 (см. пример 51), то приходится создавать сложные технические системы со следящим порогом. В этих условиях может найти применение решающее правило, при котором порог обнаружения не зависит от мощности нормальных шумовых помех. Это равносильно отсутствию априорной информации о σ_u^2.

Воспользуемся приемом, показанным на рис. 75, и за время, в течение которого изменением σ_X^2 можно пренебречь, образуем из экспериментальных данных две серии по m и n независимых значений показания X. Совместим начало координат со средним значением показания $\overline{X}$. Тогда случайные величины

$$y_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}; \qquad y_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}(X_j - \overline{X})^2}$$

будут подчиняться χ-распределению модуля многомерного нормального вектора, выражение для плотности вероятности которого приведено в табл. 8.

Образуем некоторую, пока неизвестную, функцию $z = f(y_1, y_2)$. Плотность вероятности этой функции двух независимых положительных случайных величин определяется по формуле:

$$p(z) = \int_0^\infty\int_0^\infty p(y_1)p(y_2)\delta[z - f(y_1, y_2)]dy_1 dy_2,$$

где δ — дельта-функция. Отсюда

$$p(z) = \frac{4}{(2\sigma_X^2)^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty\int_0^\infty y_1^{n-1}y_2^{m-1}e^{-\frac{y_1^2+y_2^2}{2\sigma_X^2}}\delta[z - f(y_1, y_2)]dy_1 dy_2,$$

где $\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)$ и $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ — гамма-функции. Подстановкой $\frac{y_1}{\sigma_X} = t_1$; $\frac{y_2}{\sigma_X} = t_2$ последнее выражение приводится к виду:

$$p(z) = \frac{4}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty\int_0^\infty t_1^{n-1}t_2^{m-1}e^{-\frac{t_1^2+t_2^2}{2}}\delta[z - f(\sigma_X t_1, \sigma_X t_2)]dt_1\, dt_2,$$

где зависимость $p(z)$ от σ_X входит только через функцию $f(\sigma_X t_1, \sigma_X t_2)$. Соответствующим выбором этой функции такую зависимость можно исключить.

Хотя теоретический интерес представляет отыскание и исследование всего многообразия функций, удовлетворяющих сформулированному требованию, ограничимся простейшей:

$$f(\sigma_X t_1, \sigma_X t_2) = \left(\frac{\sigma_X t_1}{\sigma_X t_2}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{t_2^{\frac{1}{k}}}{t_1^{\frac{1}{k}}}.$$

Обозначив $\frac{t_2^{\frac{1}{k}}}{t_1^{\frac{1}{k}}} = \vartheta$, заменив в подынтегральном выражении t_2 на $t_1\vartheta^k$, при $dt_2 = t_1 k\vartheta^{k-1}d\vartheta$ получим:

$$p(z) = \frac{4k}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty\int_0^\infty t_1^{m+n-1}\vartheta^{km-1}e^{-\frac{1+\vartheta^{2k}}{2}t_1^2}\delta(z - \vartheta)dt_1\, d\vartheta$$

Используя свойство δ-функции, при $z = \vartheta$ найдем, что

$$p(z)=\frac{4kz^{km-1}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty t_1^{m+n-1}e^{-\frac{1+z^{2k}}{2}t_1^2}dt_1.$$

Подстановкой $t_1^2 = \xi$ последний интеграл приводится к табличному. Окончательно:

$$p(z)=\frac{2k}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{z^{km-1}}{\left(1+z^{2k}\right)^{\frac{m+n}{2}}},$$

где $B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}$ — бета-функция. Этот результат под названием *z-распределение* включен в табл. 8.

Так как $p(z)$ не зависит от σ_X^2, то и условная вероятность ошибки I рода не зависит от мощности нормальных шумовых помех:

$$\alpha=\int_{z_п}^\infty p(z)dz=\frac{2k}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}\int_{z_п}^\infty\frac{z^{km-1}}{\left(1+z^{2k}\right)^{\frac{m+n}{2}}}dz.$$

Интеграл здесь с помощью подстановки $\dfrac{1}{1+z^{2k}}=\zeta$ выражается через неполную бета-функцию

$$B_{\zeta_п}\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)=\int_0^{\zeta_п}\zeta^{\frac{n}{2}-1}(1-\zeta)^{\frac{m}{2}-1}d\zeta$$

с верхним пределом $\zeta_п=\dfrac{1}{1+z_п^{2k}}$. Вводя в рассмотрение отношение неполной бета-функции

$$I_{\zeta_п}\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)=\frac{B_{\zeta_п}\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)},$$

получим следующее выражение для определения порога обнаружения

$$z_п=\left(\frac{1-\zeta_п}{\zeta_п}\right)^{\frac{1}{2k}}$$

по заданной условной вероятности ошибки I-го рода:

$$\alpha=I_{\zeta_п}\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right).$$

По табличным значениям неполной бета-функции на рис. 79, для примера, построены графики интегральной функции распределения вероятности

$$F(z) = 1 - I_{\zeta}\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$$

при нескольких значениях k и m = n. Задавшись значением

$$F(z_п) = 1 - \alpha = 1 - I_{\zeta_п}\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right),$$

можно по графику на рис. 79 найти пороговое значение $z_п$, которое не зависит от мощности нормальных помех.

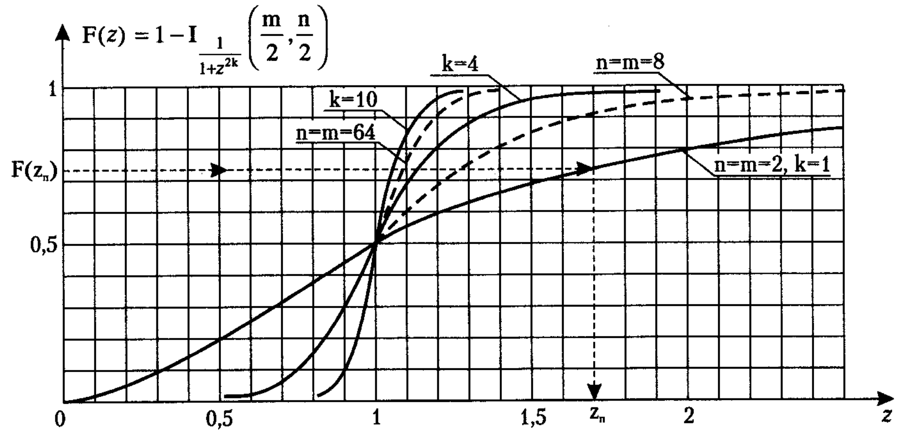


Рис. 79. Интегральные функции распределения вероятности F(z)

На линейной шкале отсчетного устройства *z* подчиняется *z*-распределению вероятности с k = 1, а

$$z_п = \sqrt{\frac{1-\zeta_п}{\zeta_п}}.$$

На квадратичной шкале z^2 подчиняется *z*-распределению вероятности с $k = \frac{1}{2}$ (распределению Р. А. Фишера в табл. 8), а

$$z_п^2 = \frac{1-\zeta_п}{\zeta_п}.$$

На логарифмической шкале плотность вероятности

$$p(\ln z) = \frac{2}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{e^{m\ln z}}{\left(1 + e^{2\ln z}\right)^{\frac{m+n}{2}}};$$

$$F(\ln z) = 1 - I_{\zeta}\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right),$$

где $\zeta = \dfrac{1}{1+e^{2\ln z}}$ в чем нетрудно убедиться, выбрав $f(\sigma_X t_1, \sigma_X t_2) = \ln\dfrac{\sigma_X t_2}{\sigma_X t_1} = \ln\dfrac{t_2}{t_1}$.

Не зависящий от мощности помех порог обнаружения

$$z_{\ln} = \ln z_{п}.$$

7.2. Качество измерений по градуированным шкалам

Номенклатура показателей качества при измерении по градуированным шкалам все время претерпевает изменения и окончательно еще не сложилась. Наиболее информативными являются:

- сходимость;
- воспроизводимость;
- неопределенность;
- точность;
- правильность;
- достоверность.

Сходимость

Показатель качества, характеризующий близость результатов измерений одной и той же измеряемой величины, выполненных в *одинаковых* условиях.

Количественной характеристикой (*мерой*) сходимости могут быть параметры, характеризующие *рассеяние* (дисперсию) этих результатов измерений.

Воспроизводимость

Показатель качества, характеризующий близость результатов измерений одной и той же измеряемой величины, выполненных в *разных* условиях.

Количественной характеристикой (*мерой*) воспроизводимости могут быть параметры, характеризующие *рассеяние* (дисперсию) этих результатов измерений.

Неопределенность

Параметр, характеризующий диапазон возможных значений величины.

Количественными характеристиками (*мерами*) неопределенности могут быть *стандартная* (определяемая способом А или способом В), *суммарная* и *расширенная* неопределенности.

Точность

Точность характеризует рассеяние результата измерения

$$Q = X + \theta$$

около среднего значения, отождествляемого со значением измеряемой величины.

Аддитивная поправка θ является неслучайной величиной, даже если ее значение точно не известно. Поэтому рассеяние результата измерения обусловлено рассеянием показания X, и *мерой точности результата измерения* служит *среднее квадратическое отклонение показания.* На практике вместо него используется оценка среднего квадратического отклонения – стандартное отклонение, или *стандартная неопределенность показания*, определяемая способом А.

Точность многократного измерения с равноточными значениями отсчета в $\sqrt{n}$ раз выше точности однократного (см. формулу (32), где $S_Q = S_X$; $S_{\hat{Q}_n} = S_{\hat{\bar{X}}_n}$).

Соотношение между стандартными отклонениями многократного и однократного измерений в зависимости от объема экспериментальных данных представлено на рис. 80.

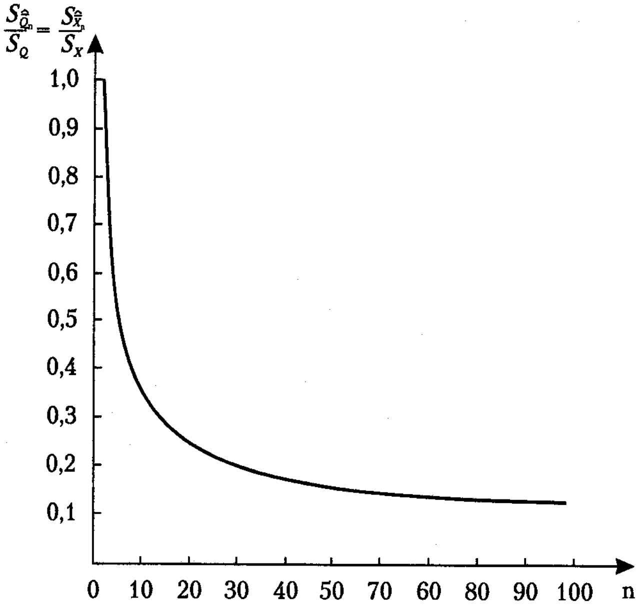


Рис. 80. Соотношение между средними квадратическими отклонениями многократного и однократного измерений

Как следует из графика на рис. 80, **увеличивая количество экспериментальных данных, можно повышать точность результата многократного измерения** вплоть до заданного уровня. Однако уже при $n > 20 \ldots 30$ дальнейшее повышение точности таким путем сопряжено с существенными затратами на выполнение большого количества измерений и малоэффективно.

Другим ограничением на пути повышения точности является *правило округлений.* Если при многократном измерении с равноточными значениями отсчета во все значения показания вносится одна и та же поправка, точное значение которой неизвестно, то *суммарная неопределенность значения измеряемой величины*

$$u_Q = \sqrt{S^2_{\hat{\bar{X}}_n} + u^2_\theta},$$

где $S_{\hat{\bar{X}}_n}$ — стандартное отклонение среднего арифметического значения показания, а u_θ — стандартная неопределенность поправки, определяемая способом В. Точность результата многократного измерения имеет смысл повышать путем увеличения количества экспериментальных данных только до тех пор, пока $S_{\hat{\bar{X}}_n} > \frac{1}{3}u_Q$. При $S_{\hat{\bar{X}}_n} \leq \frac{1}{3}u_Q$ первым слагаемым в выражении для суммарной неопределенности значения измеряемой величины в соответствии с правилом округления можно уже пренебречь (см. формулу (30)).

Повышение точности измерения метрологических характеристик средств измерений рабочими эталонами за счет многократного повторения измерительной процедуры позволяет обеспечить требуемое качество поверочных работ. Если требования к качеству поверки сформулированы в виде заданных значений $\bar{\alpha}$ и β_{max}, то может оказаться, что система уравнений (см. п. 5.1)

$$\begin{cases} \bar{\alpha} = 1 - \dfrac{\Delta+\delta}{\Delta} L\left(\dfrac{\Delta+\delta}{\sigma_\Xi}\right) + \dfrac{\Delta-\delta}{\Delta} L\left(\dfrac{\Delta-\delta}{\sigma_\Xi}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{\sigma_\Xi}{\Delta}\left[e^{-\frac{(\Delta-\delta)^2}{2\sigma_\Xi^2}} - e^{-\frac{(\Delta+\delta)^2}{2\sigma_\Xi^2}}\right]; \\ \beta_{max} = L\left(\dfrac{\Delta+\delta}{\sigma_\Xi}\right) - L\left(\dfrac{\Delta-\delta}{\sigma_\Xi}\right) \end{cases}$$

не имеет решения. Тогда следует перейти к многократному измерению метрологической характеристики рабочим эталоном. Совместное решение уравнений

$$\begin{cases} \bar{\alpha} = 1 - \dfrac{\Delta+\delta}{\Delta} L\left(\dfrac{\Delta+\delta}{\sigma_\Xi}\sqrt{n}\right) + \dfrac{\Delta-\delta}{\Delta} L\left(\dfrac{\Delta-\delta}{\sigma_\Xi}\sqrt{n}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}\dfrac{\sigma_\Xi}{\Delta}\left[e^{-\frac{(\Delta-\delta)^2}{2\sigma_\Xi^2}n} - e^{-\frac{(\Delta+\delta)^2}{2\sigma_\Xi^2}n}\right]; \\ \beta_{max} = L\left(\dfrac{\Delta+\delta}{\sigma_\Xi}\sqrt{n}\right) - L\left(\dfrac{\Delta-\delta}{\sigma_\Xi}\sqrt{n}\right) \end{cases}.$$

даст значения δ и n при заданных значениях $\bar{\alpha}$ и β_{max}.

Правильность

Внесение в показание поправки направлено на достижение *правильности* результата измерения. Правильность обеспечивается при совпадении среднего значения результата измерения со значением измеряемой величины. Это возможно только в том случае, когда поправка известна точно. Если же точное значение поправки неизвестно, то это учитывается ситуационной моделью. В этом случае внесение в показание поправки осуществляется по правилу сложения случайных величин. Чем точнее значение поправки, тем правильнее результат измерения. Таким образом, правильность результата измерения определяется точностью поправки, а мерой правильности является *аналог среднего квадратического отклонения поправки или ее стандартная неопределенность*, определяемая способом В. Чем она меньше, тем правильнее результат измерения.

При многократном измерении с равноточными значениями отсчета, выполняемом одним и тем же средством измерений, одним и тем же оператором, в одних и тех же условиях во все случайные значения показания X_i вносится одна и та же поправка $\theta_i = \theta$. Поэтому результат многократного измерения

$$\hat{\bar{Q}}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Q_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\theta_i = \hat{\bar{X}}_n + \theta$$

при аддитивной поправке, значение которой известно точно, имеет более высокую точность, чем результат однократного измерения:

$$S_{\hat{\bar{X}}_n} = \frac{S_X}{\sqrt{n}},$$

и остается абсолютно правильным, как при однократном измерении:

$$u_{\hat{\theta}_n} = u_\theta = 0.$$

При внесении же во все случайные значения показания X_i одной и той же аддитивной поправки, значение которой точно не известно, эта ситуация представляется математической моделью в виде «равномерного закона распределения вероятности поправки» на интервале $[\theta_1; \theta_2]$ со средним значением $\bar{\theta} = \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ и стандартной неопределенностью типа B

$$u_\theta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\sqrt{3}}\sqrt{n},$$

то есть результат многократного измерения становится более точным, чем результат однократного измерения, но менее правильным.

При многократном измерении с неравноточными значениями отсчета в показание каждого из m средств измерений разной точности вносится своя поправка. Каждую θ_j-ю поправку к случайному X_j-му значению показания можно рассматривать тоже как случайную величину и обращаться с ней соответствующим образом. Такой прием отнесения поправок к категории случайных величин называется *рандомизацией* (от англ. *random* — случайный). Дальнейшее зависит от характера априорной информации.

Если известны среднее квадратическое отклонение показания каждого из средств измерений и пределы, в которых находится поправка к нему, то результат измерения определяется по формуле среднего арифметического взвешенного:

$$\hat{\bar{Q}} = \frac{\frac{1}{\sigma_{X_1}^2}X_1 + \frac{1}{\sigma_{X_2}^2}X_2 + \ldots + \frac{1}{\sigma_{X_m}^2}X_m + \frac{1}{u_{\theta_1}^2}\bar{\theta}_1 + \frac{1}{u_{\theta_2}^2}\bar{\theta}_2 + \ldots + \frac{1}{u_{\theta_m}^2}\bar{\theta}_m}{\frac{1}{\sigma_{X_1}^2} + \frac{1}{\sigma_{X_2}^2} + \ldots + \frac{1}{\sigma_{X_m}^2} + \frac{1}{u_{\theta_1}^2} + \frac{1}{u_{\theta_2}^2} + \ldots + \frac{1}{u_{\theta_m}^2}}.$$

В этом выражении можно выделить среднее арифметическое взвешенное показания и среднее арифметическое взвешенное поправки:

$$\hat{\bar{Q}} = \hat{\bar{X}} + \hat{\bar{\theta}},$$

которые, соответственно, равны:

$$\hat{\bar{X}} = \sum_{j=1}^{m} g_{X_j} X_j;$$

$$\hat{\bar{\theta}} = \sum_{j=1}^{m} g_{\theta_j} \bar{\theta}_j,$$

где нормированные веса каждого j-го значения показания и каждой j-й поправки

$$g_{X_j} = \frac{\frac{1}{\sigma_{X_j}^2}}{\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{\sigma_{X_j}^2} + \frac{1}{u_{\theta_j}^2}\right)};$$

$$g_{\theta_j} = \frac{\frac{1}{u_{\theta_j}^2}}{\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{\sigma_{X_j}^2} + \frac{1}{u_{\theta_j}^2}\right)}.$$

Среднее квадратическое отклонение средневзвешенного показания $\hat{\bar{X}}$ является мерой точности результата измерения, а аналог среднего квадратического отклонения средневзвешенной поправки $\hat{\bar{\theta}}$ — мерой правильности. Выражения для этих показателей качества результата многократного измерения с неравноточными значениями отсчета имеют вид:

$$\sigma_{\hat{\bar{X}}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} g_{X_j}^2 \sigma_{X_j}^2};$$

$$u_{\hat{\bar{\theta}}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} g_{\theta_j}^2 u_{\theta_j}^2}.$$

Если точность показаний средств измерений неизвестна, но известны точно поправки, которые в эти показания нужно вносить, то формула среднего арифметического взвешенного преобразуется следующим образом:

$$\hat{\bar{Q}} = \frac{\frac{1}{S_X^2}\sum_{j=1}^{m} X_j + \frac{1}{S_\theta^2}\sum_{j=1}^{m}\theta_j}{\frac{m}{S_X^2} + \frac{m}{S_\theta^2}},$$

где

$$S_X^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(X_j - \hat{\bar{X}})^2;$$

$$S_\theta^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(\theta_j - \hat{\bar{\theta}})^2.$$

Опять-таки можно выделить среднее арифметическое взвешенное показания и среднее арифметическое взвешенное поправки:

$$\hat{\hat{Q}} = \hat{\hat{X}} + \hat{\hat{\theta}},$$

которые, соответственно, равны:

$$\hat{\hat{X}} = \sum_{j=1}^{m} g_X X_j;$$

$$\hat{\hat{\theta}} = \sum_{j=1}^{m} g_\theta \theta_j,$$

где нормированные веса каждого j-го значения показания и каждой j-й поправки

$$g_X = \frac{\frac{1}{S_X^2}}{m\left(\frac{1}{S_X^2} + \frac{1}{S_\theta^2}\right)};$$

$$g_\theta = \frac{\frac{1}{S_\theta^2}}{m\left(\frac{1}{S_X^2} + \frac{1}{S_\theta^2}\right)}.$$

Показателем точности результата измерения в данном случае служит

$$S_{\hat{\hat{X}}} = \sqrt{m g_X^2 S_X^2} = \frac{S_X}{\sqrt{m}} \cdot \frac{S_\theta^2}{S_X^2 + S_\theta^2},$$

показателем правильности —

$$S_{\hat{\hat{\theta}}} = \sqrt{m g_\theta^2 S_\theta^2} = \frac{S_\theta}{\sqrt{m}} \cdot \frac{S_X^2}{S_X^2 + S_\theta^2}$$

где

$$\frac{S_\theta^2}{S_X^2 + S_\theta^2} < 1; \quad \frac{S_X^2}{S_X^2 + S_\theta^2} < 1.$$

Если в последнем случае в качестве результата измерения использовать не среднее арифметическое взвешенное, а среднее арифметическое

$$\hat{Q}_m = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} X_j + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \theta_j = \hat{X}_m + \hat{\theta}_m,$$

то показатели его *точности* и *правильности*

$$S_{\hat{X}_m} = \sqrt{\frac{1}{m(m-1)}\sum_{j=1}^{m}\left(X_j - \hat{X}_m\right)^2} = \frac{S_X}{\sqrt{m}};$$

$$S_{\hat{\theta}_m} = \sqrt{\frac{1}{m(m-1)}\sum_{j=1}^{m}\left(\theta_j - \hat{\theta}_m\right)^2} = \frac{S_\theta}{\sqrt{m}}.$$

Если известны классы точности средств измерений и поправки, которые нужно вносить в их показания, то

$$\hat{Q} = \frac{\frac{1}{u_{X_1}^2} X_1 + \frac{1}{u_{X_2}^2} X_2 + \ldots + \frac{1}{u_{X_m}^2} X_m + \frac{1}{S_\theta^2} \sum_{j=1}^{m} \theta_j}{\frac{1}{u_{X_1}^2} + \frac{1}{u_{X_2}^2} + \ldots + \frac{1}{u_{X_m}^2} + \frac{m}{S_\theta^2}},$$

где аналог дисперсии показания $u_{X_j}^2$ определяется исходя из класса точности средства измерений. Это выражение можно преобразовать к виду:

$$\hat{Q} = \frac{\sum_{j=1}^{m} \frac{X_j}{u_{X_j}^2} + \frac{1}{S_\theta^2} \sum_{j=1}^{m} \theta_j}{\frac{m}{S_\theta^2}\left(1 + \frac{S_\theta^2}{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{u_{X_j}^2}\right)} = \frac{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{S_\theta^2}{u_{X_j}^2} X_j + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \theta_j}{1 + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{S_\theta^2}{u_{X_j}^2}}$$

и представить в виде суммы двух средних арифметических значений, взятых с одинаковым весом:

$$\hat{Q} = \frac{1}{1 + \hat{g}_m} \hat{X}_m^* + \frac{1}{1 + \hat{g}_m} \hat{\theta}_m,$$

где $\hat{X}_m^*$ — среднее арифметическое взвешенных показаний $X_j^* = \frac{S_\theta^2}{u_{X_j}^2} X_j$, а $\hat{g}_m$ — среднее арифметическое весовых коэффициентов $g_j = \frac{S_\theta^2}{u_{X_j}^2}$. Стандартное отклонение первого слагаемого в последнем выражении характеризует *точность* результата измерения, а стандартное отклонение второго — *правильность*.

Возможны и другие формы и варианты использования априорной информации.

7.3. Измерительная информация

Формы представления измерительной информации зависят от ее предназначения. Если измерительная информация предназначена для дальнейшей переработки, то она представляется в виде закона распределения вероятности результата измерения (эмпирического либо теоретического) или его числовых характеристик (либо их оценок). Если измерительная информация не предназначена для дальнейшей переработки, то она представляется в форме, удобной для восприятия человеком. Такой формой является указание интервала возможных значений измеренной величины.

Количество измерительной информации по К. Э. Шеннону определяется как разность между априорной H_0 и апостериорной H энтропиями источника сообщения. Источником сообщения (информации) в измерительных задачах служит размер. В результате измерения по шкале порядка он может оказаться меньше либо больше или равным другому размеру (в частном случае — норме). Если перед измерением оба решения равновероятны, то, казалось бы,

$$H_0 = \log_2 2 = 1;$$
$$H = 0,$$

и такое измерение дает один бит измерительной информации (рис. 81).

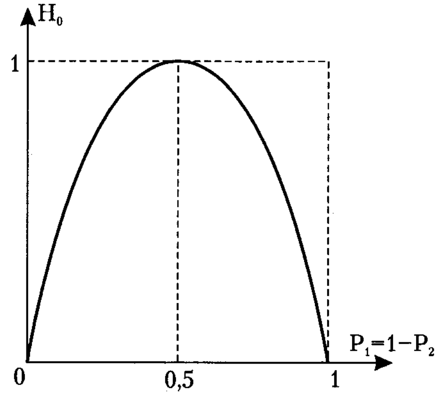


Рис. 81. Энтропия источника сообщения с вероятностями состояний P_1 и P_2

Однако это противоречит третьей аксиоме метрологии, согласно которой любое решение измерительной задачи является случайным. Следовательно, измерение по шкале порядка дает меньше бита измерительной информации. При неравновероятных исходах априорная энтропия $H_0 < 1$, и количество измерительной информации $I = H_0 - H$ получается еще меньшим. Как отмечалось в п. 3.2.1, шкалы порядка являются наименее информативными из всех измерительных шкал. При измерениях по градуированным шкалам количество измерительной информации определяется по формуле (5). Чем меньше априорная энтропия, тем меньше количество измерительной информации. При $H_0 = 0$ измерение невозможно. Это первая аксиома метрологии.

Показатели *качества измерительной информации* зависят от формы ее представления. Если измерительная информация представлена в форме результата измерения, то номенклатура показателей качества рассмотрена в пп. 7.1, 7.2. Если же она представляется в окончательном виде в форме, удобной для восприятия человеком, то важнейшим показателем качества измерительной информации является ее достоверность.

Достоверность

Показатель качества, характеризующий степень уверенности в том, что значение измеренной величины находится в указанном интервале.

Количественной характеристикой (*мерой*) достоверности могут быть *доверительная вероятность* (см. рис. 52, 73) или *уровень доверия* (см. рис. 54). Косвенно она может характеризоваться *коэффициентом охвата* (см. вариант 7 в п. 5.2). Важно подчеркнуть, что при одном и том же результате измерения можно обеспечить любую достоверность измерительной информации. Следовательно, достоверность не относится к числу показателей качества результата измерения. Она не рассчитывается *a posteriori*, а задается в виде основного требования к качеству измерительной информации.

Достоверность измерительной информации — главное условие единства измерений.

Очень часто информация, полученная в результате измерений, используется при проведении расчетов, вычислений, имеющих большое научное, инженерное, хозяйственное значение. При этом нередко не уделяется должного внимания тому, что результаты таких расчетов и вычислений, получаемые путем формальных математических преобразований, не являются абсолютно достоверными и требуют указания вероятности, с которой могут принимать те или иные значения.

Пример 62

По данным примера 39 определить числовое значение длины окружности ℓ с радиусом r.

Решение

1. $\hat{\ell} = 2\pi\hat{r} = 25{,}7$; $S_\ell = 2\pi S_r = 4{,}4$.
2. Стандартное отклонение среднего арифметического значения длины окружности

$$S_{\hat{\ell}} = \frac{S_\ell}{\sqrt{n}} = 0{,}44.$$

3. Среднее арифметическое $\hat{r}$ 100 значений r подчиняется нормальному закону распределения вероятностей, форма которого не меняется при линейном преобразовании $\hat{\ell} = 2\pi\hat{r}$. Поэтому

$$\ell = 24{,}8 \ldots 26{,}6 \text{ с вероятностью } 0{,}95.$$

Пример 63

Определить площадь круга, распределение вероятностей числовых значений радиуса которого представлено табл. 10.

Решение. Распределение вероятностей числовых значений площади круга $s = \pi r^2$ получаем, используя табл. 10:

s	P
28,3	0,2
50,3	0,5
78,5	0,3

Оценки числовых характеристик теоретической модели этого распределения вероятностей

$$\hat{s} = 54{,}4;\ S_S = 17{,}7.$$

Стандартное отклонение среднего арифметического значения площади круга

$$S_{\hat{\bar{s}}} = 1{,}8.$$

Оставляя открытым вопрос о законе распределения вероятностей $\hat{\bar{s}}$, на основании неравенства П. Л. Чебышева можно утверждать, что с вероятностью, больше чем 0,9

$$\hat{\bar{s}} - 3{,}2S_{\hat{\bar{s}}} \le s \le \hat{\bar{s}} + 3{,}2S_{\hat{\bar{s}}}.$$

Отсюда

s = 48,7 ... 60,1 с вероятностью не менее 0,9.

Продолжение примера 43

Стандартное отклонение среднего арифметического значения полупериметра

$$S_{\widehat{\overline{r_1+r_2}}} = \frac{S_{r_1+r_2}}{\sqrt{n}} = 0{,}1.$$

Среднее арифметическое полупериметра прямоугольника как сумма средних арифметических больших массивов экспериментальных данных подчиняется нормальному закону распределения вероятности. Таким образом,

$r_1 + r_2 = 8{,}0 \ldots 8{,}4$ с вероятностью 0,95.

Пример 64

Решить пример 44, используя результаты многократных измерений:

$$\hat{\bar{m}}_б = 4{,}0 \text{ кг}; \; S_{\hat{\bar{m}}_б} = \sqrt{\frac{S^2_{\hat{m}_б}}{n}} = 1{,}9 \cdot 10^{-3} \text{ кг} = 1{,}9 \text{ г};$$

$$\hat{\bar{m}}_т = 0{,}9 \text{ кг}; \; S_{\hat{\bar{m}}_т} = \sqrt{\frac{S^2_{\hat{m}_т}}{n}} = 1{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ кг} = 1{,}3 \text{ г}.$$

Решение

1. $\hat{\bar{m}}_н = \hat{\bar{m}}_б - \hat{\bar{m}}_т = 3{,}1$ кг.
2. $S_{\hat{\bar{m}}_н} = \sqrt{S^2_{\hat{\bar{m}}_б} + S^2_{\hat{\bar{m}}_т}} = \sqrt{3{,}7 + 1{,}7} = 2{,}3$ г.
3. $\hat{\bar{m}}_н$ как разность средних арифметических значений больших массивов экспериментальных данных подчиняется нормальному закону распределения вероятности. На этом основании,

   $m_н = (3095 \ldots 3105)$ г с вероятностью 0,95.

Продолжение примера 45

В расчетах с использованием ситуационных моделей вероятностно-статистические закономерности не выполняются. Достоверность результата вычислений обеспечивается выбором коэффициента охвата (см. продолжение примера 15 в п. 5.2). В данном случае

$m_н$ = (3368 ... 3432) г при коэффициенте охвата, равном 2,

или

$m_н$ = (3352 ... 3448) г при коэффициенте охвата, равном 3.

Пример 65

С какой скоростью должно вращаться тело в примере 3, чтобы центробежная сила равнялась 2Н? Результаты измерения массы тела и радиуса окружности (в метрах) приведены в табл. 13 и 10.

Решение

1. На основании решения примера 1

$$v = \sqrt{\frac{rF}{m}}.$$

2. Согласно формуле (18)

$$\hat{\hat{v}} = \sqrt{\frac{\hat{\hat{r}}F}{\hat{\hat{m}}}} = \sqrt{\frac{4{,}1 \cdot 2}{0{,}9}} = 3{,}02 \text{ м/с}.$$

Поправка, компенсирующая неточность вычисления этого значения,

$$\theta_v = -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{F}{\hat{\hat{m}}\hat{\hat{r}}^3}}S_r^2 - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{\hat{\hat{r}}}{\hat{\hat{m}}F^3}}S_F^2 + \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\hat{\hat{r}}F}{\hat{\hat{m}}^5}}S_m^2 = -0{,}01 \text{ м/с},$$

так как $S_r^2 = 0{,}5$ м^2; $S_F^2 = 0$; $S_m^2 = 1{,}7 \cdot 10^{-4}$ кг^2. Следовательно,

$$\hat{\hat{v}} = 3{,}01 \text{ м/с}.$$

3. По формуле (22)

$$S_v = \sqrt{\frac{1}{4}\frac{F}{\hat{\hat{m}}\hat{\hat{r}}}S_r^2 + \frac{1}{4}\frac{\hat{\hat{r}}}{\hat{\hat{m}}F}S_F^2 + \frac{1}{4}\frac{\hat{\hat{r}}F}{\hat{\hat{m}}^3}S_m^2} = -0{,}26 \text{ м/с}.$$

4. Стандартное отклонение $\hat{\hat{v}}$

$$S_{\hat{\hat{v}}} = 2{,}6 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}.$$

Поскольку закон распределения вероятности $\hat{\hat{v}}$ неизвестен, то на основании неравенства П. Л. Чебышева

v = (2,9 ... 3,1) м/с с вероятностью не менее 0,9.

Продолжение примера 50

При *равноточных измерениях* на основании неравенства П. Л. Чебышева

$m_б$ = (3,96 ... 4,08) кг; $m_т$ = (0,85 ... 0,97) кг с вероятностью не менее 0,9.

При ***неравноточных измерениях*** на основании неравенства П. Л. Чебышева

$m_б$ = (3,93 ... 4,09) кг; $m_т$ = (0,86 ... 0,94) кг с вероятностью не менее 0,9.

Библиографический список

1. *Шишкин И. Ф.* Теоретическая метрология: Учебник для вузов. — М.: Изд-во стандартов, 1991. — 492 с.
2. *Шишкин И. Ф.* Теоретическая метрология: Учебное пособие. — Л.: СЗПИ, 1983. — 84 с.
3. *Шишкин И. Ф.* Лекции по метрологии: Учебное пособие. — М.: РИЦ «Татьянин день», 1993. — 55 с.
4. *Шишкин И. Ф.* Теоретическая метрология: Учебное пособие. Ч. I. Общая теория измерений. — 3-е изд., перераб. и доп. — СПб.: Изд-во СЗТУ, 2008. — 189 с.
5. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement: First edition. — ISO, Switzerland, 1993. — 101 p.

Алфавитный указатель

Игорь Федорович Шишкин

Теоретическая метрология:
Учебник для вузов. 4-е изд.

Заведующий редакцией	*А. Сандрыкин*
Ведущий редактор	*Ю. Сергиенко*
Технический редактор	*Я. Матвеева*
Литературный редактор	*А. Гущин*
Художественный редактор	*Л. Адуевская*
Корректор	*Н. Викторова*
Верстка	*Л. Харитонов*

Подписано в печать 08.07.09. Формат 70х100/16. Усл. п. л. 18,06. Тираж 4000. Заказ 17224.
ООО «Лидер», 194044, Санкт-Петербург, Б. Сампсониевский пр., д. 29а.
Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции ОК 005-93, том 2;
95 3005 — литература учебная.
Отпечатано по технологии CtP в ОАО «Печатный двор» им. А. М. Горького.
197110, Санкт-Петербург, Чкаловский пр., д. 15.